۱۳۴

۱- گاسیوروویچ
2- آیزبرگ (مفهوم)
3- پاول و کریسن
4- سل و دیدر
5- ساکورایی
6- جلد چهارم کتاب هالیدی

منابع اصل

۱- سری شوم
2- Marromatice
3- بالا سوبرامانیان
4- کنستانتینسکو

مسائل اصل مکانیک کوانتومی

مکانیک کوانتومی

تابش جسم سیاه :

تابشی که اجسام در واسطه‌ی دمای آن داشته باشند را تابش گرمایی گویند.

انتشار رادیوی گرمایی e (emition) (گرما ده)

جذب " " a یا A (تعصیع)

در این خاصیت جسم سیاه : $e = a = 1$

پس جسم سیاه همه گرمایی که در آن می‌رسد را جذب می‌کند.

قوانین تجربی :

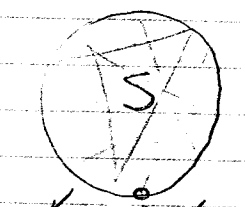
۱- هر چه دما بیشتر شود توان تابشی جسم بیشتر شده.

2- هر قدر که دما بیشتر می‌شود رنگ جسم تابش دهنده به سمت آبی

با فرکانس بالاتر یا طول موج پایین‌تر حرکت می‌کند (آبی)

جسم سیاه :

جسمی که با پرتوهای مانند دود و پوشانده شده باشد را جسم سیاه نامیده می‌شود. در عمل کاواکی که دارای روزنه‌ی بسیار کوچکی است را به عنوان جسم سیاه در نظر گرفته می‌شود زیرا اگر تابشی از طریق روزنه جسم سیاه را داخل آن نفوذ کند پس از بازتابش‌های متوالی در داخل جسم جذب دیواره‌های داخلی شده و احتمال خروج آن از داخل کاواک تقریباً غیر ممکن است.



شرط اساسی جسم سیاه

$s \ll S$

تابش بازتابی از دیواره‌ی برود به بیرون و جذب شود. شبیه دارد در همین و همان هر دو نیست

نکته‌ی مهم: فقط دیواره‌ی داخلی کاواک جسم سیاه هستند

سه کره‌ی فلزی با مشخصه‌ی $R_1 < R_2 < R_3$ ، $\rho_1 > \rho_2 > \rho_3$

را تا دمای $1000\,K$ گرم کرده و با ایجاد حفره‌ای بسیار ریز در سطح آنها

هر سه کره را داخل یک اتاق کاملاً تاریک قرار می‌دهیم. شدت تابش بازتابی از دیواره‌ی داخلی و دیواره‌ی خارجی هر سه کره را با هم مقایسه می‌کنیم.

دیواره‌ی داخلی هر سه کره را مشابه یک جسم سیاه عمل می‌کند. در یک جسم سیاه تابش گرمایی تنها به دما بستگی دارد و مستقل از مشخصه‌های مثل جنس و شکل هندسی و ناهمواری‌های سطحی است. بنابراین تابش دیواره‌های داخلی با یکدیگر مساوی است. (زیرا دما مساوی است)

برای تابش جسم سیاه تابش فقط به دما بستگی دارد.

بستگی تابش گرمایی به دما و فرکانس

1. قانون وین

2. استفان بولتزمن

در تجربیات روزمره همواره به این نتیجه رسیده‌ایم که هر چه دمای یک جسم سوخته و سفیدتر شود رنگ جسم سوخته از قرمز به سمت قرمز نارنجی و زرد، زرد مایل به آبی، آبی و در نهایت آبی مایل به سفید تغییر می‌کند. (با افزایش دما رنگ به سمت فرکانس بالا می‌رود.) (آبی)

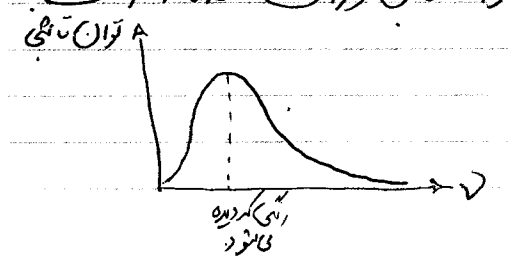
همچنین مشاهده کرده‌ایم که هر چه دما افزایش یابد توان تابشی در واحد سطح نیز زیاد می‌شود. تجربیات فوق قوانین حاکم بر تابش جسم سیاه را بیان می‌کند.

۱- قانون وین: با افزایش دما طیف تابشی به سمت فرکانس‌های بالاتر جابجا می‌شود. (قانون جابجایی وین)

$$\nu_{max} \propto T$$

$$\lambda_{max} T = cte$$

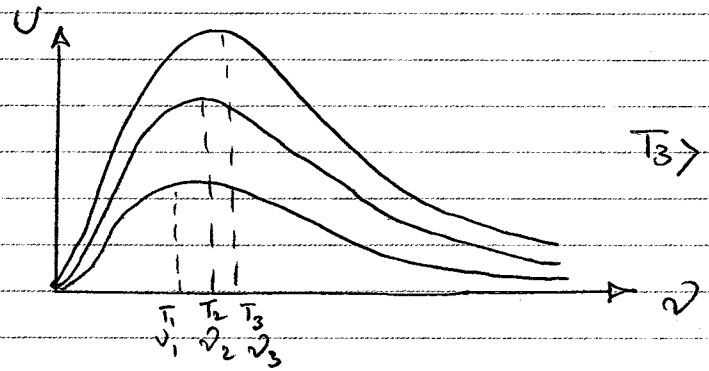
λ_{max} طول موجی است که توان تابشی در آن Max است.



۲- قانون استفان بولتزمن: با افزایش دما توان تابشی (انرژی تابشی در واحد زمان از واحد سطح) برای جسم سیاه به شدت (به طور غیرخطی) افزایش می‌یابد به گونه‌ای که داریم:

$$U_{(T)} = \sigma T^4$$

σ ثابت بولتزمن $= 5.67 \times 10^{-8}\ W/m^2K^4$



$T_3 > T_2 > T_1$

پس با افزایش دما جابجایی طیف به سمت فرکانس‌های بالاست (یعنی افزایش فرکانس)

(۴)

مثال: جسم سیاهی در دمای T توان تابشی 10mW دارد است. توان تابشی این جسم در دمای 2T چقدر است؟

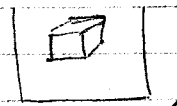
$U_1 = \sigma T_1^4$, $\frac{U_1}{U_2} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^4$, $U_2 = 160\ mW$

$U_2 = \sigma T_2^4$

مثال: قله طیف تابشی جسم سیاهی در دمای 1400 K در طول موج 2.3μm قرار دارد. طول موج قله در 3200 K کدام است؟

$\lambda_{1_{max}} T_1 = \lambda_{2_{max}} T_2 = cte \longrightarrow \lambda_2 = 1.61\ \mu m$

مثال: انرژی تابش شده از یک جسم سیاه باعث افزایش دمای یک مایع از 32°C به 34°C می‌شود. دمای این جسم سیاه را چند برابر کنیم تا در همین مدت زمان به 64°C برسد؟



$P = \frac{W}{t} = \frac{mc\Delta\theta}{t} = \frac{2mc}{t}$

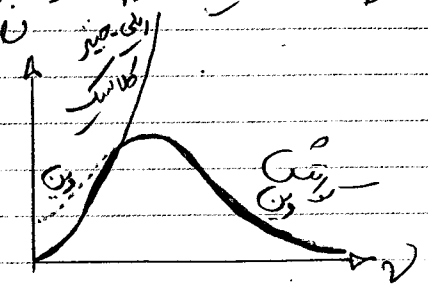
پس توان تابشی که جسم داخل جعبه ساطع می‌کند با توان تابشی که جسم بزرگ دریافت می‌کند باید با هم برابر باشند.

$U_1 = \sigma T_1^4 = \frac{mc\Delta\theta_1}{\Delta t}$, $U_2 = \sigma T_2^4 = \frac{mc\Delta\theta_2}{\Delta t}$

$\frac{\sigma T_1^4}{\sigma T_2^4} = \frac{mc\Delta\theta_1/\Delta t}{mc\Delta\theta_2/\Delta t} \longrightarrow \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^4 = \left(\frac{\Delta\theta_1}{\Delta\theta_2}\right)$

$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^4 = \frac{1}{16} \longrightarrow T_2 = 2T_1$

چگالی انرژی یک جسم سیاه برحسب دما و فرکانس



ریلی جینز: $U_{(\omega,T)} = cte\ \omega^2 KT$

وین با استفاده از توزیع ماکسول برای سرعت‌ها در مولکول‌های گاز و شبیه‌سازی با توزیع انرژی تابشی توسط اتم‌های واقع بر دیواره‌ی داخلی کاواک چگالی انرژی تابشی را بصورت پایین بدست آورد:

وین: $U_{(\omega,T)} = \omega^3 f\left(\frac{\omega}{T}\right)$

پلانک: $U_{(\omega,T)} = cte\ \frac{\omega^3}{e^{\hbar\omega/KT} - 1}$

رابطه پلانک دقیقاً بر منحنی تجربی منطبق است.

مثال: کدام یک از توابع زیر برای چگالی طیفی $\rho(\omega,T)$ برای جسم سیاه با قانون وین سازگار نیست؟ ($\alpha, c_1, c_2, c_3, c_4 = cte$)

1/ $c_1\omega^2 T\ln\left(\frac{\alpha\omega}{T}\right) = \omega^3\frac{T}{\omega}\ln\left(\frac{\alpha\omega}{T}\right) = \omega^3 f\left(\frac{\omega}{T}\right)$

2/ $\frac{\omega^3[\ln(\alpha\omega)-\ln T]}{\sin\frac{\alpha\omega}{T}} = \frac{\omega^3\ln\left(\frac{\alpha\omega}{T}\right)}{\sin\frac{\alpha\omega}{T}} = \omega^3 f\left(\frac{\omega}{T}\right)$ شکل کلی

3/ $c_3\frac{\omega^4}{T} = \omega^3\left(\frac{\omega}{T}\right)$

✓4/ $c_4\omega^2 e^{-\alpha\omega/T} \neq \omega^3 f\left(\frac{\omega}{T}\right)$

مثال: شرط کوانتش باعث ... انرژی طیفی در فوتون‌ها ... می‌شود.

1/ کاهش، پاسن
2/ کاهش، پاولی ✓
3/ افزایش، پاسن
4/ افزایش، پاولی

نمودار طیفی مدل

انرژی و اندازه حرکت زاویه‌ای کوانتیده اند.

۱+۲ (دو روش) وجود دارد که تن ⊙ می‌دهد انرژی کوانتیده است:

۱- روش کوانتش بوهر (برای سیستم‌هایی که حول نقطه مرکزی حرکت می‌کنند)

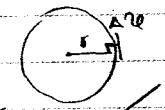
۲- ویلسون - سامرفیلد (برای سیستم‌های پریودیک)

3- اصل عدم قطعیت هایزنبرگ (قطعا انرژی حالت پایه)

اصل کوانتش بوهر: $L_n = n\hbar$

حرکت الکترون روی مدارهای مجاز است که اندازه حرکت الکترون روی این مدارها مضرب صحیحی از $\hbar$ باشد.

$$m v_n r_n = n\hbar$$



$$F(r) = -\frac{\partial U(r)}{\partial r} = \frac{mv^2}{r}$$ نیروی جاذبه مرکزی

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U(r)$$

پس کوانتش انرژی کمان و سرعت v در خود دارد.

The MAN Group

MAN

MAN Aktiengesellschaft
Munich

MAN B&W
MAN TURBO
MAN
MAN ROLAND
FERROSTAAL
MAN TECHNOLOGIE
RENK
DWE

Principal Associated Companies

SMS
SHW

Investments accumulated over centuries of technical progress.

Market and customer oriented development and innovation of product systems.

Interlinking modern cross-sector technologies with existing product concepts.

Building leadership positions for MAN products on the world's markets.

High investments in tangible assets and in research and development.

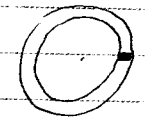
Specialized training of young people and highly skilled personnel.

A commitment to maintain and fortify the financial base of the MAN Group.

Making sure that positions won are held and strengthened.

(۶)

مثال: ذره‌ای روی یک حلقه در حال لغزش است. انرژی‌های مجاز این ذره را بدست آورید.



انرژی پتانسیل این سیستم عبارت است از:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U$$

$$E = \frac{p^2}{2m} = \frac{(nh/r)^2}{2m} = \frac{n^2h^2}{2mr^2}$$

مثال: جسمی تحت تاثیر نوسانگر $\frac{1}{2}m\omega^2 r^2$ می‌باشد. انرژی‌های مجاز این سیستم را بدست آورید.

$$E = \frac{1}{2}m\frac{nh\omega}{m} + \frac{1}{2}m\omega^2\frac{nh}{m\omega}$$

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 \quad , \quad F = -\frac{\partial U}{\partial r} = -m\omega^2 r$$

در حرکت دایره‌ای: $\sum F = -\frac{mv^2}{r} = -m\omega^2 r \longrightarrow v = r\omega$

$$r = \sqrt{\frac{nh}{m\omega}} \quad , \quad v = \sqrt{\frac{nh\omega}{m}} \qquad mvr = nh$$

مثال: جسمی تحت تاثیر پتانسیل $U(r) = U_0\left(\frac{r}{a}\right)^K$ قرار گرفته. انرژی مجاز این سیستم را بدست آورید.
(تمرین 16 فصل 1 گاسیوروویچ)

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U_0\left(\frac{r}{a}\right)^K$$

$$F = -\frac{dU}{dr} = -\frac{mv^2}{r} \longrightarrow v^2 = U_0\frac{K}{m}\left(\frac{r}{a}\right)^K$$

$$E = U_0\left(\frac{r}{a}\right)^K\left[\frac{K}{2}+1\right]$$

!!؟

مثال: با استفاده از کوانتش جرم انرژی یک الکترون چرخنده به دور هسته را بدست آورید

$$F = \frac{(Ze)e}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = \frac{Ze^2}{2r}$$

$$L = rmv = n\hbar$$

$$\Rightarrow v = \frac{Ze^2}{n\hbar}$$

$$rmv = n\hbar \quad , \quad r = \frac{n\hbar}{mv} = \frac{n\hbar}{m\left(\frac{Ze^2}{n\hbar}\right)} = \frac{n^2\hbar^2}{Ze^2m}$$

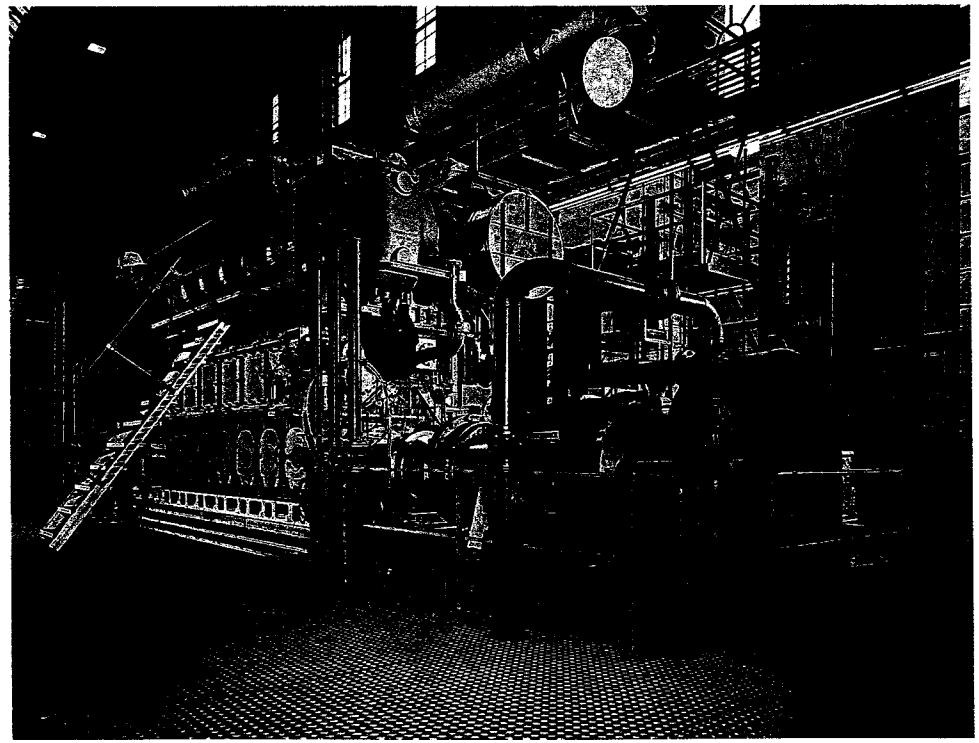
$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \left(-\frac{Ze^2}{r}\right) = \frac{Ze^2}{2r} - \frac{Ze^2}{r} = -\frac{Ze^2}{2r}$$

$$= -\frac{Ze^2}{2\left(\frac{n^2\hbar^2}{Ze^2m}\right)} = -\frac{1}{2}mc^2\frac{Z^2\alpha^2}{n^2} \quad , \quad \alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$$

2

MAN B&W

6L 40/54 ON THE TESTBED OF MAN - B&W GERMANY



MAN GHH IRAN
ام.آ.ان.گ‌ها.ایران

(۸)

3 روش ویلسون سامرفیلد

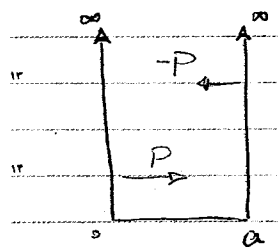
$$\oint p\,dq = nh \rightarrow \oint dx\, p = nh$$

۱- ذره در جعبه

2- نوسانگر

3- ذره تحت پتانسیل جاذبه $U = -\frac{GMm}{r}$

4- $U_{(x)} = \alpha |x|^{p}$



$$U_{(x)} = \begin{cases} 0 & 0<x<a \\ \infty & \text{سایر} \end{cases}$$

$$\oint p\,dx = nh \rightarrow \left[\int_0^a + \int_a^0\right] \overset{\vec{P},\,-\vec{P}}{p}\,dx = nh$$

نکته: جایی که جهت کوانتش انرژی در پیستون‌های مختلف می‌تواند ایجاد محدودیت وقتی در حرکت آزاد است.

4 P کمیت برداری است و همیشه تغییر می‌کند و

چون $F = -\frac{\partial U}{\partial x}$ و در ناحیه داخل جعبه پتانسیل صفر است پس نیروی خارجی وارد بر دیوار $F = \frac{dP}{dt}$ پس P مقداری ثابت است.

$$\int_0^a p\,dx + \int_a^0 (-p)\,dx = 2\int_0^a p\,dx = nh$$

و چون P ثابت است از انتگرال بیرون می‌آید یعنی:

$$0<x<a \rightarrow E = \frac{P^2}{2m} = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$$

نوسانگر:

$$\oint p\,dx = nh$$

$$x = A\sin\omega t \rightarrow dx = A\omega\cos\omega t\,dt$$

$$v = A\omega\cos\omega t$$

$$p = mA\omega\cos\omega t$$

$$m^2A^2\omega^2\int \cos^2\omega t\,dt = m^2A^2\omega^2\int_0^T \tfrac{1}{2}(1+\cos 2\omega t)\,dt = nh$$

و $A^2 = \frac{2nh}{m\omega^2 T}$

$$E = \tfrac{1}{2}m\omega^2A^2 = \tfrac{1}{2}m\omega^2\frac{2nh}{m\omega^2T} = \frac{nh}{T}, \quad \hbar = \frac{h}{2\pi}$$

$$E = \frac{n 2\pi\hbar}{T} = n\hbar\omega$$

تذکر: در نظریه‌ی جدید ویلسون-سامرفلد

$$\oint p\,dq = (n+1/2)\pi\hbar$$

که با استفاده از این رابطه انرژی نوسانگر $(n+1/2)\hbar\omega$ خواهد شد.

روش دوم برای حل نوسانگر:

$$E = \frac{p^2}{2m} + 1/2\, m\omega^2 x^2$$

$$1 = \frac{p^2}{a^2 (2mE)} + \frac{x^2}{b^2 (2E/m\omega^2)} \rightarrow 1 = \frac{p^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$\int y\,dx = S$ مساحت

$S = ab\pi$

$$\int p\,dx = nh = S = ab\pi$$

$$\pi\sqrt{2mE}\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} = nh \rightarrow E = n\hbar\omega$$

روش سوم برای حل نوسانگر:

$$E = \frac{p^2}{2m} + V(x) \rightarrow p = \sqrt{2m}\sqrt{E - V(x)}$$

$$\oint p\,dx = nh = \sqrt{2m}\oint \sqrt{E - V(x)}\,dx$$

اصل عدم قطعیت هایزنبرگ

$$\Delta x\,\Delta p \geq \hbar$$

$$\left.\begin{array}{l} x \geq \Delta x \\ p \geq \Delta p \end{array}\right\} \rightarrow E = \frac{p^2}{2m} + V(x) \overset{?}{\geq} \frac{(\Delta p)^2}{2m} + V(x)$$

$$V(x) = \frac{1}{x^3} \rightarrow x \geq \Delta x \rightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{\Delta x}$$

نیروهایی که دارای تابع $\frac{1}{r^2}$ هستند که در واقع نسبت عمومی $\frac{\Delta p^2}{2m}$ بر $V(x)$ می‌چربند.

7 انرژی حالت پایه برای سیستم‌های (با استفاده از عدم قطعیت)

۱/ نوسانگر هارمونیک

۲/ پتانسیل گرانشی

۳/ پتانسیل کولنی

$U_{ay} = \delta|x|$ /4

انرژی حالت پایه نوسانگر:

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$$

$$E \geq \frac{(\Delta p)^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 (\Delta x)^2$$

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar \rightarrow \Delta p \geq \frac{\hbar}{\Delta x}, \quad \Delta p_{min} = \frac{\hbar}{\Delta x}$$

$$E \geq \underbrace{\frac{\hbar^2}{2m\Delta x^2} + \frac{1}{2} m\omega^2 (\Delta x)^2}_{B}$$

$$\frac{\partial B}{\partial x} = 0, \quad (\Delta x)^2 = \frac{\hbar}{m\omega}$$

$$E_{min} = \hbar\omega$$

8 پتانسیل گرانشی و کولن و یکسو ساز فیلد

$$p = \sqrt{(E-U)2m} = \sqrt{\left(E + \frac{GMm}{r}\right)2m}$$

$$\sqrt{2m} \oint \sqrt{E + \frac{GMm}{r}}\, dr$$

$$E = b\left(\frac{n^2\hbar^2}{mbK}\right)^{1/2}\left(\frac{K}{2}+1\right) \qquad U(r) = br^K$$

9

تابع پتانسیل $A|x|^p$ به روش ویلسون-سامرفیلد

$$\oint p\,dx = \sqrt{2m}\oint\sqrt{E-U(x)}\,dx = \sqrt{2mE}\oint\sqrt{1-\frac{A|x|^p}{E}}\,dx = nh$$

$$\frac{A|x|^p}{E} = u^p \rightarrow dx = \left(\frac{E}{A}\right)^{1/p} du$$

$$\sqrt{2mE}\oint\sqrt{1-u^p}\,du\left(\frac{E}{A}\right)^{1/p} = \underbrace{\left(\oint\sqrt{1-u^p}\,du\right)}_{I}\frac{\sqrt{2m}}{A^{1/p}}E^{1/2+1/p} = nh$$

$$E^{\frac{p+2}{2p}} = \frac{A^{1/p}I}{\sqrt{2m}}nh$$

$$E = \left(\frac{A^{1/p}Ih}{\sqrt{2m}}\right)^{2p/(p+2)} n^{\frac{2p}{p+2}}$$ (تشابهی از بعد کوانتومی n)

مفهوم بسته موج

جنبه ذره‌ای و موجی اجسام ممکن نگردند بدین معنی که اگر از خاصیت ذره‌ای خاصه بگیریم و جانب موجی نزدیک می‌شویم و برعکس این محال است که بتوان یک پدیده را با دو روش توصیف کرد.

فقط موجی خیلی دیرتر از رفتار ذره‌ای مورد بحث واقع شد به خاطر رابطه‌ی دوبروی یعنی $\lambda = \frac{h}{p}$. $\frac{h}{mv}$ که برای ذره غیرنسبیتی درست است.

$E = h\nu \rightarrow \nu = E/h$ پلانک-انیشتین

$p = h/\lambda \rightarrow \lambda = h/p$ دوبروی

خواص توصیف کننده خاصیت موجی

خواص توصیف کننده خاصیت ذره‌ای

بر هر جسم با مشخصه‌ی ذره‌ای E و p می‌توان موجی با مشخصه‌ی λ و ν نسبت داد به گونه‌ای که ارتباط بین

12 انجام مشخصه‌ی خاصیت ذره‌ای (E, p) با مشخصه‌ی توصیف کننده خاصیت موجی (λ, ν) از طریق ثابت کوانتومی h برقرار می‌گردد.

روابط بالا یک ویژگی شاخص آن است که می‌توان به هر جسم خاصیت ذره‌ای و هم موجی نسبت داد اما از آنجایی که اصول عدم قطعیت محدودیت‌هایی را بر مشخصه‌ی توصیف کننده خاصیت ذره‌ای اعمال می‌کنند باید بر مشخصه‌ی توصیف کننده حالت موجی نیز محدودیت‌هایی شبیه اعمال کرد. واضح است:

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar \xrightarrow{p = \hbar k} \Delta x \Delta(\hbar k) \geq \hbar \rightarrow \Delta x \Delta k \geq 1 \quad (I)$$

$$\Delta t \Delta E \geq \hbar \xrightarrow{E = \hbar\omega} \Delta t \Delta(\hbar\omega) \geq \hbar \rightarrow \Delta t \Delta\omega \geq 1 \quad (II)$$

محدودیت‌های ای که به مشخصه‌ی توصیف کننده خواص ذره‌ای

محدودیت‌های ای که به مشخصه‌ی توصیف کننده خواص موجی

13 رابطه I شاخص‌دهنده‌ی آن است که یعنی توان برای توصیف خاصیت موجی یک ذره در آن یک تک موج نسبت داد. روشن است که یک تک موج با ω و k کاملاً مشخص دارای $\Delta k = 0$ و $\Delta\omega = 0$ است و رابطه‌ی I شاخص‌دهنده‌ی آن است که برای $\Delta k = 0$ باید $\Delta x = \infty$ باشد (یا موجی با گسترش بی‌نهایت) یعنی توان توصیف قائل قبول از جسمی با مکان تقریباً مشخص داشته باشد پس لازم است که تعداد زیادی موج با ω و k های متفاوت را برای توصیف خاصیت موجی جسم به کار ببریم. (تعداد زیاد موج در پس آن است که لازم است Δx مقدار نسبتاً کوچکی باشد تا توصیف کننده‌ی ذره‌ای با مکان تقریباً مشخص باشد.)

حال تعداد زیادی موج هر یک با ω و k مربوط به خود با هم تداخل می‌کنند به گونه‌ای که در محدوده‌ی بسیار کوچکی از فضا (جایی که ذره قرار دارد) یعنی بسته موج با هم تداخل کاملاً سازنده انجام داده و در خارج این ناحیه

تداخل کاملاً ویرانگر را انجام می‌دهد. ناحیه‌ی تداخل سازنده

در بنا بسته موج نامیده می‌شود که تراکم قابل قبولی از یک ذره

با مکان تقریباً مشخص را بدست می‌دهد. هر یک از این تک موج‌ها

با بسامدی موسوم در سرعت فاز $v_{ph} = \frac{\omega}{K}$ و $\frac{E}{P} = v_{ph}$ پیش می‌رود

در حالی که ناحیه‌ی تداخل سازنده با بسامدی موسوم در سرعت گروه یعنی

$v_g = \frac{d\omega}{dK}$ ، $v_g = \frac{dE}{dp}$ حرکت می‌کند. سرعت گروه امواج مادی برابر

است با سرعت ذره‌ای که حرکتش از این امواج پیروی می‌کند.

(اثبات) $v_{ذره} = v_g$

الف) حالت غیر نسبیتی ذره آزاد $(U=0)$

$$E = \frac{P^2}{2m} \quad , \quad v_g = \frac{dE}{dp} = \frac{P}{m} = v_{ذره}$$

ب) حالت نسبیتی

$$E = \sqrt{P^2c^2 + E_0^2}$$

$$v_g = \frac{dE}{dp} = \frac{\frac{1}{2}2Pc^2}{E} = \frac{Pc^2}{E} = \frac{m_{نسبیتی}v_{ذره}c^2}{mc^2} = v_{ذره}$$

$$m = \gamma m_0 = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\, m_0$$

مثال: رابطه بین فرکانس و طول موج برای امواج گرانشی در آب‌های عمیق

بصورت $v = \left(\frac{g}{2\pi\lambda}\right)^{1/2}$ می‌باشد. رابطه پاشندگی را بدست آورید.

$$E = \hbar\omega = \hbar 2\pi\nu \rightarrow \nu = \frac{E}{h}$$
$$P = \hbar K = \hbar\frac{2\pi}{\lambda} \rightarrow \lambda = h/p$$

$$v^2 = \frac{g}{2\pi\lambda} \xrightarrow{4\pi^2} \omega^2 = \frac{2g\pi}{\lambda} = gK \rightarrow 2\omega d\omega = g dK$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dK} = \frac{g}{2\omega} \quad , \quad v_{ph} = \frac{\omega}{K} = \frac{g}{\omega} = 2v_g$$

مثال: سرعت فاز برای گروه خاصی از امواج بصورت $\sqrt{\frac{KT}{\rho}}$ می‌باشد

رابطه پاشندگی را بدست آورید. (سرعت فاز و گروه)

$$v_{ph}^2 = \frac{KT}{\rho} = \frac{\omega^2}{K^2} \rightarrow K^3T = \omega^2\rho$$

رابطه بین v_g و v_{ph}

$$3K^2T\,dK = 2\omega\, d\omega\, \rho$$
$$\frac{\omega}{K}\frac{d\omega}{dK} = \frac{3}{2}\frac{KT}{\rho}$$
$$v_{ph}\, v_g = \frac{3}{2} v_{ph}^2 \rightarrow v_g = \frac{3}{2} v_{ph}$$

(۱۴)

17 مثال: برای جسمی که دارای سرعت قابل مقایسه با سرعت نور است، سرعت فاز:

الف) همواره از سرعت نور کمتر است

ب) [illegible]

ج) مساوی است

✓ د) نسبت به شرایط و رابطه پاشندگی $v_{ph} < c$ و $v_{ph} > c$

$v_g \lesssim c$

مثال: رابطه پاشندگی امواج الکترومغناطیسی در محیط پلاسما به صورت $\omega^2 = \omega_p^2 + K^2c^2$ می‌باشد که در آن فرکانس پلاسما $\omega_p^2 = \frac{4\pi e n^2}{m}$ می‌باشد. رابطه میان سرعت فاز و گروه را بدست آورید.

$$2\omega\, d\omega = 2Kc^2\, dK$$

$$\frac{\omega}{K} = c^2 \frac{dK}{d\omega} \rightarrow \frac{\omega}{K}\frac{d\omega}{dK} = c^2 \rightarrow v_{ph} v_g = c^2$$

برای موج الکترومغناطیسی: $v_{ph} v_g = c^2$

اطلاعات با v_g جابجا می‌شود پس نمی‌تواند از c بزرگتر باشد.

18 برای ذره غیرنسبیتی رابطه میان سرعت فاز و سرعت گروه v رابطه پاشندگی تعیین می‌کند.

$$E = \frac{p^2}{2m} \rightarrow \begin{cases} v_{ph} = \frac{E}{p} = \frac{1}{2} v_{\text{ذره}} & \text{برای ذره آزاد:} \\ v_g = \frac{dE}{dp} = \frac{p}{m} = v_{\text{ذره}} & \end{cases}$$

برای ذره نسبیتی:

الف) جرم سکون صفر (موج الکترومغناطیسی در خلاء) $\omega = Kc$

$$v_{ph} = \frac{\omega}{K} = c \quad , \quad v_g = \frac{d\omega}{dK} = c$$

تذکر: $\omega^2 = \omega_p^2 + K^2c^2$

$$v_{ph} = \frac{\omega}{K} = \frac{\sqrt{\omega_p^2 + K^2c^2}}{K} = \sqrt{\frac{\omega_p^2}{K^2} + c^2} > c$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dK} = \frac{d}{dK}\sqrt{\omega_p^2 + K^2c^2} < c$$

ب) جرم سکون غیرصفر

$$v = \frac{\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}}{p} = c\sqrt{1 + \frac{m^2c^2}{\hbar^2K^2}} > c$$

$$v < c \rightarrow \frac{d}{dp}\left(\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}\right) = 0$$

19 تابع موج شکل ریاضی بسته موج است و دربر دارنده‌ی تمامی اطلاعات مربوط به ذره از جمله مکان، تکانه، احتمال، انرژی و ... می‌باشد.

تابع موج در فضای مکان و اندازه حرکت

با در اختیار داشتن $\psi(x)$ داریم:

$$\phi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dx\, e^{-ipx/\hbar}\, \psi(x)$$

و در این رابطه x متغیر و p ضریب است اما:

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dp\, e^{ipx/\hbar}\, \phi(p)$$

تذکر مهم: $\psi(x)$ و $\phi(p)$ تبدیل فوریه همدیگرند.

نکته: 1/ تابع موج گوسی $\psi_1(x) = Ne^{-\alpha x^2}$

2/ " " تابع $\psi_2(x) = Ne^{-\alpha x}$ $x>0$

$= Ne^{\alpha x}$ $x<0$

20 3/ تابع موج سینوسی تابع $\psi_3(x) = N\frac{\sin kx}{x}$

4/ " " دلتای دیراک $\psi_4(x) = \delta(x-x_0)$

5/ " " سینوسی $\psi_5(x) = N\sin kx$

تبدیل فوریه در فضای p

1/ $\phi_1(k) = N' e^{-\beta p_k^2}$

2/ $\phi_2(k) = \frac{N}{k^2+a^2}$!؟ تابع لرنتس

3/ $\phi_3(k) = \begin{cases} b & |x|<k \\ 0 & \end{cases}$!!؟ تعریف نشده

4/ $\phi_4(k) = Ne^{ikx}$!؟ ذره‌ی آزاد

5/ $\phi_5(k) = N\sin kx'$

تابع موج گوسی کمترین عدم قطعیت را دارد.

نکته ۱: باید توجه داشت که اگر تبدیل فوریه تابع موج $\psi_1(x)$ تابع موج $\varphi_1(x)$ باشد تبدیل فوریه $\varphi_1(x)$ نیز $\psi_1(x)$ است.

این بدان معناست که اگر تابع موج در فضای x گوسی باشد تبدیل فوریه آن در فضای p گوسی خواهد بود و بالعکس.

همچنین اگر تابع موج در فضای x تابع دلتا دیراک باشد تابع موج در فضای p تابع موج ذره آزاد است و اگر تابع موج در فضای x تابع ذره آزاد باشد تابع موج در فضای p تابع دلتا دیراک است.

مثال: ۹ صفحه ۵) عرض تابع گوسی از همه کمتر است پس Δx کمتر است.

تابع دلتای دیراک نیست چون در فضای x ذره آزاد است یعنی $\Delta x = \infty$ و $\Delta p = \infty$ (با تبدیل فوریه گاوسی با هم گاوسی است) در واقع حاصلضرب تابع گاوسی $\Delta x \Delta p$ کمترین مقدار را نسبت به بقیه دارد.

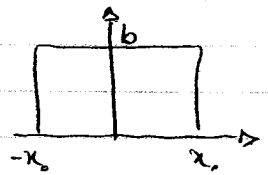
عدم قطعیت تابع گوسی در دو فضا Min است

پس حاصلضرب آن نیز Min خواهد بود.

$$e^{-\alpha x^2} = \frac{1}{e^{\alpha x^2}} = \frac{1}{\underset{2.7}{4\alpha}} \qquad \Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2}$$

گوسی $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$

$$\psi(x) = \begin{cases} b & |x| < x_0 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$



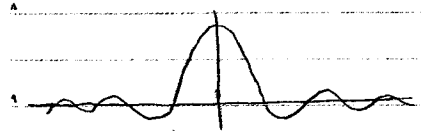
$$\varphi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-ipx/\hbar}\, \psi(x)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \left[\int_{-\infty}^{-x_0} + \int_{-x_0}^{+x_0} + \int_{x_0}^{+\infty} \right] e^{-ipx/\hbar}\, \psi(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-x_0}^{+x_0} dx\, e^{-ipx/\hbar}\, b$$

$$= \frac{b}{\sqrt{2\pi\hbar}} \frac{\hbar}{-ip} e^{-ipx/\hbar} \Big|_{-x_0}^{x_0}$$

$$= \frac{2ib^2}{\sqrt{2\pi\hbar}} \, \frac{e^{-\frac{ipx_0}{\hbar}} - e^{\frac{ipx_0}{\hbar}}}{2i} \qquad -\frac{\sin kx_0}{k}$$



$$\int_{-\infty}^{+\infty} du \, \frac{\sin^2 u}{u^2} = \pi$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iu}}{u^2+m^2} \, du = \pi \frac{e^{-|m|}}{|m|}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} du \, e^{-\alpha u^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

محاسبه‌ی پهنای بسته موج

برای هر تابع مخصوص $\psi(x)$ پهنای تابع محدوده‌ای است که ذره می‌تواند در آنجا حضور داشته باشد (پهنای واقعی) اما به دو دلیل ما از یک پهنای غیرواقعی و ساده‌تر استفاده می‌کنیم:

۱. از اغلب محاسبه‌ی پهنای واقعی مستقیم محاسبه پیچیده است.

۲. مقدار پهنا در بعضی محدوده‌ها از اندازه‌ای کم است که می‌توان با تقریب قابل قبولی از آن صرف‌نظر کرد.

به دلایل فوق به جای محاسبه‌ی پهنای واقعی سعی می‌کنیم محدوده‌ای از فضا را به عنوان پهنای تابع معرفی کنیم که احتمال حضور ذره در آن قابل توجه باشد اما در خارج آن محدوده احتمال حضور صفر نیست.

پهنای تابع موج وقتی است که احتمال حضور ذره در آن وجود دارد.

(۱) روش اول: محاسبه‌ی پهنا در $1/e$ مقدار ماکزیمم $|\psi|^2$

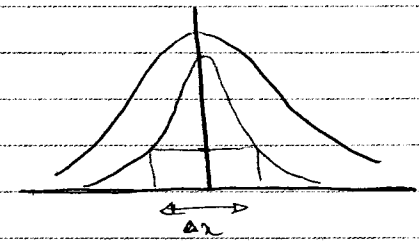
پهنا کمیت فیزیکی است و مقدار حقیقی را باید قبول کند پس توابعی که عامل موهومی دارند را باید از بین برد. عامل موهومی

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \, e^{ik_0x} \, e^{-x^2/4\alpha}$$

$$|\psi|^2 = \psi^*\psi = \frac{\pi}{\alpha} \cdot e^{-x^2/2\alpha}$$

$$\frac{1}{e}\frac{\pi}{\alpha} = \frac{\pi}{\alpha} e^{-x^2/2\alpha}$$

$$\frac{x^2}{2\alpha} = 1 \rightarrow x = \sqrt{2\alpha} \rightarrow \Delta x = 2\sqrt{2\alpha}$$



$$\psi(x) = N e^{-\alpha x^2}$$

$$|\psi(x)|^2 = N^2 e^{-2\alpha x^2}$$

$$2\alpha x^2 = 1 \rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \rightarrow \Delta x = \sqrt{\frac{2}{\alpha}}$$

(۲) روش دوم: محاسبه‌ی پهنا در $\frac{1}{e}$ مقدار ماکزیمم ψ

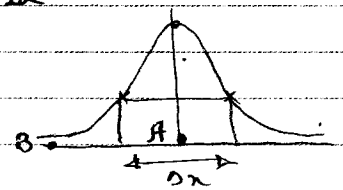
$$\alpha x^2 = 1 \rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \rightarrow \Delta x = \frac{2}{\sqrt{\alpha}}$$

(۳) روش سوم: محاسبه‌ی پهنا در نقطه عطف منحنی

$$\psi(x) = N e^{-\alpha x^2} \rightarrow \psi'(x) = (-2\alpha x) N e^{-\alpha x^2}$$

$$\psi''(x) = (4\alpha^2 x^2) N e^{-\alpha x^2} - 2\alpha e^{-\alpha x^2}$$

$$\rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \rightarrow \Delta x = \sqrt{\frac{2}{\alpha}}$$



روش چهارم: B دارای احتمال تقع A نسبت به تقع B خیلی بیشتر است اما در روش های ذکر شده ما این احتمال را با هم مساوی در نظر گرفتیم. (روش دقیق)

در این روش با توجه به اینکه بازه‌های مختلف احتمال‌های حضور یک ذره یکسان نمی‌دهند مکانیزمی را به کار می‌بریم تا برای بازه‌هایی که احتمال حضور بیشتر است سهم بیشتری در محاسبه‌ی مقدار Δx قائل شویم.

خواهیم داشت:

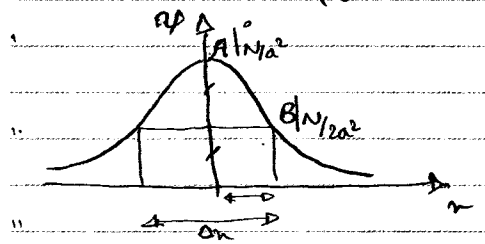
$$(\Delta x)^2 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} (x - \langle x \rangle)^2 f^2(x)\, dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)\, dx}$$

روش پنجم: (مخصوص توابع لورنتسی)

تبدیل فوریه تکمیل مطالب

محاسبه پهنای در نصف ماکسیمم

$$\psi(x) = \frac{N}{x^2+a^2}$$



$$\psi'(x) = \frac{-N(2x)}{(x^2+a^2)^2} = 0 \,,\; x=0$$

$$x=0 \rightarrow \psi(0) = \frac{N}{a^2}$$

$$\frac{N}{2a^2} = \frac{N}{x^2+a^2} \rightarrow x=a \rightarrow \Delta x = 2a$$

پهن شدگی بسته موج (مربوط به تابع گوسی)

پهن شدگی بسته موج بدان معناست که احتمال یافتن ذره در محلی که در $t=0$ خوب بوده است اکنون مقداری غیر صفر است. این موضوع که با گذشت زمان بسته موج پهن می‌شود بدان معناست که اطلاعات ما در مورد مکان ذره با گذشت زمان کمتر می‌شود و بالعکس اطلاعات ما در مورد اندازه حرکت ذره بیشتر می‌شود یعنی بسته موج منتسب به ذره در فضای اندازه حرکت باریکتر می‌گردد.

رابطه پهن شدگی

$$\Delta x(t) = \Delta x(0)\sqrt{1+\frac{\beta^2 t^2}{\alpha^2}}$$

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, e^{ik_0 x}\, e^{-x^2/4\alpha}$$

$$\psi(x,t) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha + i\beta t}}\, e^{i(k_0 x - \omega(k_0)t)}\, e^{-\frac{(x-v_g t)^2}{4(\alpha+i\beta t)}}$$

رابطه پهن شدگی

$$\Delta x_t = \Delta x_0 \sqrt{1+\left(\frac{t}{T}\right)^2} = \Delta x_0\sqrt{1+\frac{\beta^2 t^2}{\alpha^2}}$$

$$T = \frac{\alpha}{\beta} \quad \begin{cases} \Delta x_0 = 2\sqrt{2\alpha} \rightarrow \alpha = \frac{1}{8}(\Delta x_0)^2 \\ \beta = \frac{1}{2}\frac{d^2\omega}{dk^2} \end{cases}$$

$$\Delta x(0) = \frac{4\pi}{2\sqrt{2}}$$

اگر رابطه ω برحسب k خطی باشد یعنی ω مقدار ثابتی باشد پهنای موج با گذشت زمان تغییری نمی‌کند مثلا اگر مجاز بودیم که موج الکترومغناطیسی بسته موج گوسی نسبت به موج با گذشت زمان پهن نمی‌شد زیرا $\omega = ck$.

$$\beta = 0 = \frac{d^2\omega}{dk^2} \rightarrow \frac{d\omega}{dk} = c_1 \,,\; \omega = c_1 k + c_2$$

مثال: 8 مجهول 4) بدون تغییر می‌ماند.

مثال: اگر پهنای یک بسته موج گاوسی مربوط به یک ذره آزاد در $t=0$ برابر با 4mm باشد پهنای بسته موج منتسب به این ذره 4 ثانیه بعد چقدر است؟

ذره $m \simeq 25\,\hbar$

$\omega = \frac{\hbar k^2}{2m}$ ذره آزاد $\rightarrow \beta = \frac{1}{2}\frac{d^2\omega}{dk^2} = \frac{\hbar}{2m} = \frac{1}{50}$

$\Delta x(4) = \Delta x(0)\sqrt{1+\frac{\beta^2 t^2}{\alpha^2}} = 4\sqrt{1+\frac{(1/50)^2(4)^2}{1/8(4)^2}}$

$\alpha = 1/8\,(\Delta x_0)^2$

4.003 mm

مثال: بسته موجی متناظر با باریکه‌ای از ذرات جرم 4×10^{-34} kg که در ابتدا دارای پهنای معادل 1mm است پس از طی مسافتی معادل 1cm پهنای معادل 2mm پیدا می‌کند. انرژی جنبشی باریکه چقدر است؟

$\beta = \frac{1}{2}\frac{d^2\omega}{dk^2} = \frac{\hbar}{2m} = \frac{\hbar}{2(4\hbar)} = \frac{1}{8}$

$\Delta x(t) = \Delta x(0)\sqrt{1+\frac{\beta^2 t^2}{\alpha^2}} \rightarrow t = ?\ \sqrt{3}$

$x = 1\,cm \rightarrow v = ?$

$E = \frac{1}{2}mv^2 = ?$

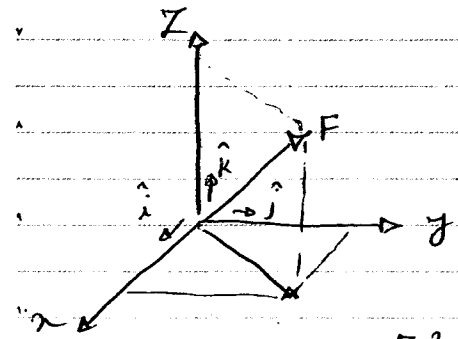
6.66×10^{-37} J

۱۵/۸/۳۴

عملگر

به کمیت فیزیکی قابل مشاهده و قابل اندازه‌گیری (در آزمایشگاه) یک مشاهده‌پذیر است. رابطه ریاضی منتسب به هر مشاهده‌پذیر فیزیکی عملگر نامیده می‌شود. (عملگر فیزیکی)

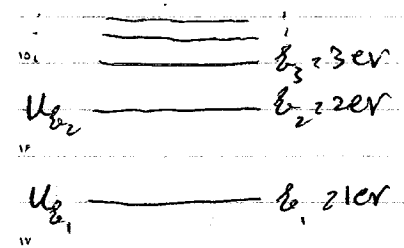
فضای برداری



$$\vec{F} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k}$$

$$|F| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} = 1$$

Orthonormality
$\begin{cases} \hat{i}\cdot\hat{i} = \hat{j}\cdot\hat{j} = \hat{k}\cdot\hat{k} = 1 & \text{نرمالیزاسیون} \\ \hat{i}\cdot\hat{j} = \hat{j}\cdot\hat{k} = \hat{k}\cdot\hat{i} = 0 & \text{تعامد (orthogonal)} \end{cases}$



$$\psi = \alpha_1 u_{E_1} + \alpha_2 u_{E_2} + \dots$$

α_1^2 احتمال اینکه انرژی برابر u_{E_1} شود.

معادله ویژه مقدار $A u_{E_n} = a u_{E_n}$

عملگرهای تمام خواص جابجایی و شرکت‌پذیری و توزیع‌پذیری را دارند اما جمع عملگرها خاصیت جابجایی ندارد به خاطر عدم قطعیت.

یعنی در مکانیک کوانتومی برخی از عملگرها را نمی‌توان به طور همزمان و با دقت زیاد اندازه‌گیری کرد مانند مکان و اندازه حرکت چرا که رابطه‌ی عدم قطعیت میان آنها برقرار است در چنین عملگرهایی می‌توان نوشت $AB \neq BA$ و این بدان معناست که با هم جابجا نمی‌شوند.

$[A,B] = AB - BA$ جابجایی

$\{A,B\} = AB + BA$ پادجابجایی

$[A, B+C] = [A,B] + [A,C]$

$[A, BC] = [A,B]C + B[A,C]$

$[A, \frac{1}{B}] = \frac{-1}{B^2}[A,B]\frac{1}{B}$

5 پرانتز پواسون تابعی از x اول بود، نتیجه مثبت است.

$$[x, f(p)] = i\hbar \frac{\partial f(p)}{\partial p}$$

$$[G(x), p] = i\hbar \frac{\partial G}{\partial x}$$

$$e^{A+B} = e^{A} e^{B} e^{-\frac{1}{2}[A,B]}$$

$$e^{A} B e^{-A} = B + [A,B] + \frac{1}{2!}[A,[A,B]] + \dots$$

اتحاد بیکر هاسدورف

$$[A,[B,C]] + [B,[C,A]] + [C,[A,B]] = 0$$

اتحاد ژاکوبی

$$A u_a = a u_a \rightarrow f(A) u_a = f(a) u_a$$

$$[x_i, p_j] = i\hbar \delta_{ij}$$

$$[x, p_x] = i\hbar \,,\quad [x, p_y] = 0 \,,\quad [x, p_z] = 0$$

$$[p_i, p_j] = 0 \,,\quad [x_i, x_j] = 0$$

if $[A,B] = 0$ Then $[A, f(B)] = 0$

if $[A,B] = c$ Then $[A, f(B)] = c\frac{df(B)}{dB}$

6 مثال: برای محاسبه زیر بخش‌های پوئنکاره عبارت $[x^2, p^2]$ حقیقی است.

مثال 2: عملگر L در بازه‌ی $x \in [a, -a]$ است به گونه‌ای که:

$$Lf(x) = \frac{\hbar}{i}\frac{df(x)}{dx} - \beta x f(x) \,,\qquad f(a) = f(-a)$$

و راه تعیین این عملگر را بدست آورید.

مثال 1/

$$[x^2, p^2] = x[x, p^2] + [x, p^2]x = x\, i\hbar(2p) + i\hbar(2p)\, x$$

$$= 2i\hbar(xp + px) = 2i\hbar\{x, p\}$$

مثال 2/

$$Lf(x) = \lambda f(x)$$

$$\left(\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx} - \beta x\right) f(x) = \lambda f(x)$$

$$\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx} f = \lambda f + \beta x f = (\lambda + \beta x) f$$

$$\int_{f_1}^{f} \frac{\hbar}{i}\frac{df}{f} = \int (\lambda + \beta x)\, dx$$

$$\ln\frac{f}{f_0} = \frac{i}{\hbar}\left(\lambda x + \tfrac{1}{2}\beta x^2\right)$$

$$f = f_0\, e^{\frac{i}{\hbar}(\lambda x + \frac{1}{2}\beta x^2)}$$

$$f(a) = f(-a)$$

$$f_0 e^{i/\hbar(\lambda a + 1/2\beta a^2)} = f_0 e^{i/\hbar(-\lambda a + 1/2\beta a^2)}$$

$$e^{2i\lambda a/\hbar} = 1 \rightarrow e^{2i\lambda a/\hbar} = e^{i(2n\pi)} \rightarrow \lambda = \frac{n\pi\hbar}{a}$$

مثال: ثابت کنید در رابطه زیر ψ و ψ' باید تعامد باشند تا رابطه برقرار باشد:

$$\langle\psi|xp_x + p_x x|\psi'\rangle = 0$$

$$\langle\psi|[H, x^2]|\psi'\rangle = \langle\psi|Hx^2 - x^2H|\psi'\rangle$$

$$= \langle\psi|Hx^2|\psi'\rangle - \langle\psi|x^2H|\psi'\rangle$$

$$= Ex^2 - x^2E' = 0 \rightarrow E = E'$$ تبهگنی

$$[H, x^2] = [p^2/2m + V(x), x^2] = \frac{1}{2m}[p^2, x^2]$$

$$= \frac{-i\hbar}{m}(xp + px) = \frac{\hbar}{im}(xp + px)$$

$f(x) = a\sin x + b\cos x$ (ثابت 63 ص 19)

$$h = -i\frac{d}{dx}, \quad Lf = \lambda f$$

$$-i\frac{d}{dx}(a\sin x + b\cos x) = \lambda(a\sin x + b\cos x)$$

$$-i(a\cos x - b\sin x) = \lambda(a\sin x + b\cos x)$$

$$\left.\begin{aligned} -ia\cos x &= \lambda b\cos x \\ ib\sin x &= \lambda a\sin x \end{aligned}\right\} \rightarrow -\frac{a}{b} = \frac{b}{a} \rightarrow a^2 + b^2 = 0$$

مثال: کدامیک از مقادیر زیر ویژه مقدار عملگر $A = e^{-i/\hbar a p_x}$ است که در آن a مقدار ثابت و p تکانه خطی است.

a /1 $\quad$ p /3

ap /2 $\quad$ $e^{-i/\hbar ap}$ /4 ✓

$$Au_a = au_a \rightarrow f(A)u_a = f(a)u_a$$

$$\hat{P}|p\rangle = p|p\rangle \rightarrow e^{-i/\hbar a\hat{p}}|p\rangle = e^{-i/\hbar ap}|p\rangle$$

مثال: حاصل عبارت روبرو چیست؟

$$[x+d/dx\ ,\ x-d/dx] = ?$$

تذکر: برای بدست آوردن رابطه جابجایی میدان عملگرهای دینامیکی لازم است از طاری تابع موج استفاده کنیم.

$$[x+d/dx\ ,\ x-d/dx]\psi = (x+d/dx)(x\psi - \frac{d\psi}{dx})$$

$$-(x-\frac{d}{dx})(x\psi+\frac{d\psi}{dx})$$

$$=\left[\cancel{x^2\psi} - x\frac{d\psi}{dx} + \frac{d}{dx}(x\psi) - \frac{d^2\psi}{dx^2}\right]$$

$$-\left[\cancel{x^2\psi} + x\frac{d\psi}{dx} - \frac{d}{dx}(x\psi) - \frac{d^2\psi}{dx^2}\right]$$

$$= -x\frac{d\psi}{dx} + \psi + x\frac{d\psi}{dx} - x\frac{d\psi}{dx} + \psi + x\frac{d\psi}{dx}$$

$$= 2\psi$$

$$[x+d/dx\ ,\ x-d/dx] = 2$$

85,11,13

انواع عملگرها

۱) عملگرهای خطی و غیرخطی — ۲) عملگرهای هرمیتی و غیرهرمیتی

عملگر خطی عملگری است که دارای دو خاصیت زیر باشد:

$$L(f_1(x)+f_2(x)) = Lf_1(x) + Lf_2(x)$$

$$Lcf_1(x) = cLf_1(x)$$

$f_1(x)$ و $f_2(x)$ توابع دلخواه و c_1 و c_2 اعدادی مختلط اند.

دو رابطه بالا می‌توان در قالب یک رابطه بصورت زیر نوشت:

$$L(c_1f_1(x)+c_2f_2(x)) = c_1Lf_1(x) + c_2Lf_2(x)$$

مثال: تست صفحه 19)

۱، ۴ و ۶ خطی هستند و بقیه غیرخطی اند

$$A_2 au = aA_2u$$

$$a^*u^* = au^* \quad \text{غیرخطی}$$

$$A_3\underbrace{[u_1+u_2]}_{u} = A_3u_1 + A_3u_2 \Rightarrow (u_1+u_2)^2 \neq u_1^2+u_2^2 \quad \text{غیرخطی}$$

12 عملگرهای هرمیتی دو خاصیت زیر را دارند:

۱/ $A^\dagger = A$

۲/ $\langle A\rangle^* = \langle A\rangle$

عملگرهای هرمیتی عملگرهایی هستند که یک مشاهده‌پذیر فیزیکی واقعی را توصیف می‌کنند.

نکات مهم:

۱/ عملگرهای $B_1 = A + A^\dagger$, $B_2 = i(A^\dagger - A)$, $B_3 = A^\dagger A$ عملگرهای هرمیتی‌اند صرف‌نظر از اینکه A هرمیتی باشد یا نباشد.

۲/ اگر A هرمیتی و B هرمیتی باشد AB هرمیتی است زمانی که A و B جابجا پذیر باشند. (حل دیدید)

$A = A^\dagger$, $B = B^\dagger$

$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger = BA$

$[B,A] = 0 \rightarrow BA = AB$

$\rightarrow (BA) = (AB)^\dagger = (AB)$

13 $A = A^\dagger$, $B = B^\dagger$

۳/ $A^n B^m$ هرمیتی نیست همین طور $B^m A^n$ هرمیتی نیست و $A^n B^m + B^m A^n$ هرمیتی است.

۴/ عملگر هرمیتی دارای دو خاصیت اساسی می‌باشد:

الف) ویژه مقادیر آن حقیقی اند.

ب) ویژه بردارهای آن بر یکدیگر عمودند و بدین ترتیب مجموعه‌ای کامل تشکیل می‌دهند که می‌توان هر بردار دلخواهی را در این فضا برحسب آنها بسط داد. (اصل موضوعه بسط)

مثال: اگر A و B هرمیتی باشند $(A+B)^n$ هرمیتی است. (تمرین اصل 6 گاسیدوریچ)

مثال: فرض کنید A عملگری باشد که تابع x و p است. اگر $[x^2 + 2p, A]$ مطلوب است محاسبه $[p^2, A]$ (حل در ۱۱ خرداد داد)

$[x^2+2p, A] = \underbrace{i\hbar \frac{\partial A}{\partial p}}_{} = (\hbar^2 + 2p)$

با بدست آوردن A انتگرال را حساب می‌کنیم

14

عملگر با دو هرمیتی دارای دو خاصیت زیر است:

1/ $A^{\dagger} = -A$

2/ $\langle A \rangle^{*} = -\langle A \rangle$

- یعنی مقدار چشمداشتی عملگر A عدد موهومی محض است.

یعنی قسمت حقیقی ندارد.

عملگر یونیتاری

اگر U عملگر یونیتاری باشد داریم:

$UU^{\dagger} = 1$ یا $U^{-1} = U^{\dagger}$

نکته: برای عدد دیگر همان استار است. $a^{\dagger} = a^{*}$

مثال: اگر $[B, B^{\dagger}]$, $B = \frac{d}{dx} + x\frac{d^2}{dx^2}$ حاصل عبارت

$[x + \frac{d}{dx} , x - \frac{d}{dx}] = ?$ بیابید.

نکته 1: اگر عملگری بصورت $\frac{d}{dx}$ در اختیار داشته باشیم از

$\frac{d}{dp} = \frac{x}{i\hbar}$

برحسب p و اگر بصورت $\frac{d}{dp}$ باشد از

برحسب x می‌نویسیم. $p = \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx} \rightarrow \frac{d}{dx} = \frac{pi}{\hbar}$

نکته 2: x و p عملگرهای هرمیتی اند پس به راحتی می‌توان

نتیجه گرفت که $\frac{d}{dx}$ و $\frac{d}{dp}$ عملگرهای با دو هرمیتی اند.

اثبات: $\left(\frac{d}{dx}\right)^{\dagger} = \frac{1}{\hbar}(ip)^{\dagger} = -\frac{ip}{\hbar} = -\frac{d}{dx}$

$B = \frac{d}{dx} + x\frac{d^2}{dx^2} = \frac{ip}{\hbar} - x\frac{p^2}{\hbar^2}$

پس $\frac{d}{dx}$ غیرهرمیتی است. $[B, B^{\dagger}] = ?$

$[x + \frac{d}{dx} , x - \frac{d}{dx}] = [x + \frac{ip}{\hbar} , x - \frac{ip}{\hbar}]$

جای x با x و p با p عوض می‌شود.

$= [x, -ip/\hbar] + [ip/\hbar, x]$

$= -\frac{i}{\hbar}(i\hbar) + \frac{i}{\hbar}(-i\hbar)$

$= 1 + 1 = 2$

عملگر پاریته

استفاده از محاسبات ریاضی برای راه یافتن در مفاهیم فیزیکی دقیق‌تر باعث می‌شود که در هیچ مکانیک همواره به دنبال ساده سازی محاسبات فیزیکی باشیم. یکی از مشخصه‌هایی که موجب چنین تحولی می‌شود زوج و فرد بودن توابع موج است و از این رو تشخیص زوج و فرد بودن تابع موج در مکانیک از اهمیت خاصی برخوردار است.

اگر معادله شرودینگر را برای پتانسیل خاص حل کنیم تابع موج را بدست آورده و می‌توانیم زوج و فرد بودن آن را تعیین کنیم اما اغلب مقابل می‌کنیم بدون حل معادله شرودینگر زوج و فرد بودن توابع موج را حدس بزنیم. برای این منظور از عملگری به نام پاریته استفاده می‌کنیم.

$$\pi f(x) = f(-x) \begin{cases} f(-x) = +f(x) & \text{بدست} \\ f(-x) = -f(x) & \text{" } -1 \text{ "} \\ f(-x) = g(x) & \end{cases}$$

$f(x)$ در حالت پاریته با ویژه مقدار $+1$

$f(x)$ در حالت پاریته نیست.

* عملگر پاریته روی تابع موج اثر می‌کند و ضرب می‌شود و روی عملگر اثر می‌کند و در طرف دیگر نیز می‌ماند

در سه بعد:

$$\pi f(\vec{r}) = f(-\vec{r}) \begin{cases} f(\vec{r}) \to f(-\vec{r}) \equiv \begin{cases} x \to -x \\ y \to -y \\ z \to -z \end{cases} & \text{بت مختصات دکارتی} \\ f(\vec{r}) \to f(-\vec{r}) \equiv \begin{cases} r \to r \\ \theta \to \pi - \theta \\ \phi \to \pi + \phi \end{cases} & \text{بت مختصات کروی} \end{cases}$$

تذکر ۱: تمام توابع زوج و فرد ویژه حالت‌های عملگر پاریته‌اند

تذکر ۲: ویژه مقادیر عملگر پاریته ± 1 است زیرا:

$$\pi^2 \psi(x) = \pi(\pi\psi(x)) = \pi(\psi(-x)) = \psi(-(-x)) = \psi(x)$$

$$\pi^2 = 1 \quad , \quad \pi = \pm 1$$

اثر پاریته روی عملگرهای کوانتومی

اثر عملگر پاریته با عملگر مکان جابجا نمی‌شود اما پادجابجا می‌شود.

$$\pi x = -x\pi \quad \to \quad \{x, \pi\} = 0$$

4.2 سکورا

تقارن تشخیص داده شده توسط عملگر پاریته تقارن ریاضی است (برای محاسبات)

$\pi p = -p\pi \rightarrow \{p,\pi\} = 0$ /2

$\pi L = L\pi \rightarrow [\pi, L] = 0$ /3

عملگر π با تمام عملگرهای اندازه حرکت زاویه‌ای (s و l و j) جابجا می‌شود.

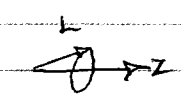
$L = r \times p$

$\pi L = \pi r \times p = -r \times \pi p = -(-r) \times p = r \times p$

$$\left.\begin{array}{l}[\pi, H] \neq 0 \\ [\pi, H^\dagger] \neq 0\end{array}\right\} \rightarrow \{\pi, H\} = \{\pi, H^\dagger\} = 0$$ /4

اثر عملگر پاریته روی سیستم‌های مختلف

* بردار L در سیستم‌های با تقارن کروی ثابت نیست و L^2 ثابت است یعنی اندازه ثابت است.



عملگر پاریته با عملگر انرژی جنبشی موجود در هامیلتونی جابجا می‌شود. اگر این عملگر با عملگر پتانسیل جابجا شود می‌توان نتیجه گرفت که عملگر پاریته با عملگر هامیلتونی جابجا شده و در نتیجه هامیلتونی تحت

پاریته ناوردا است و ویژه حالت‌های انرژی سیستم (به شرط نداشتن تبهگنی) انرژی‌ها یا زوج خواهد بود و یا فرد.

شرط آنکه پتانسیل سیستم با عملگر پاریته جابجا شود آن است که کاملاً است پتانسیل تابع زوجی از x باشد.

$H = T + V(x)$

$$\left.\begin{array}{l}[\pi, T] = 0 \\ [\pi, V(x)] = 0\end{array}\right\} \rightarrow [\pi, H] = 0$$

مثال: ویژه حالت انرژی کدام یک از سیستم‌های زیر انرژی‌ها زوج یا فرد است؟

1/ $H_1 = \frac{P^2}{2m}$

2/ $H_2 = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$

3/ $H_3 = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2)$

4/ $H_4 = \frac{P^2}{2m} + V(x)$, $V(x) = \begin{cases} 0 & 0<x<a \\ \infty & \text{سایر} \end{cases}$

5/ $H_5 = P^2/2m - e^2/r$

6/ $H_6 = P^2/2m + V(x)$ $V(x) = \begin{cases} 0 & |x|<a \\ \infty & \text{سایر} \end{cases}$

روز بهره وری، روز بزرگداشت ملاصدرا (صدر المتالهین) روز جهانی توسعه فرهنگی

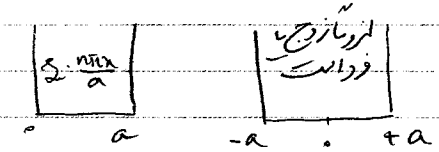
عملگر H_1 اما ویژه حالت‌های $[H_1, P]=0$ که
زوج یا فرد نیستند. (به دلیل وجود تبهگنی) e^{ikx}

در هیچ ای یک بعدی مقید تبهگنی ندارد و H_2 و P جابجا می‌شوند
پس H_2 انرژی‌ها زوج یا فرد است.

$[H_3, P]=0$ و چون در دو بعد است تبهگنی دارد پس ویژه حالت‌ها
دارد عددی ویژه حالت‌ها پس انرژی‌ها زوج و فرد نیست.

ویژه حالت‌های H_4 نه زوج است و نه فرد

پاریته تقارن ریاضی سیستم را تعیین می‌کند.



با توجه به اینکه تابع موج پس صفر تا a به صورت sin و پس
a تا -a برابر صفر است ویژه حالت انرژی‌ها زوج یا فرد نمی‌باشند
زیرا با تبدیل a به -x در روابط تابع sin از تابع موج sin به
تابع موج صفر رسیده‌ایم. $0<-x<a \rightarrow 0>x>-a$

با تغییر x به -x از تابع پتانسیل صفر به ∞ رسیده‌ایم
و برای تقارن باید به پهنای پتانسیل برسیم پس تابع نه زوج است
و نه فرد.

H_5 تبهگنی دارد، پتانسیل زوج و $P^2/2m$ زوج است با پاریته
جابجا می‌شود پس یا زوج است یا فرد. کروی $r \to r$ دکارتی $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$
(در آخر شود به نکته P3 صفحه بعد)

قضیه: اگر پتانسیل یک سیستم کوانتومی تابعی زوج از x باشد
($V(x)=V(-x)$) در این صورت با داشتن تبهگنی ویژه حالت‌ها
انرژی‌ها یا زوج خواهند بود و یا فرد.

نکته ۱: در یک نوسانگر هارمونیک یک بعدی عبارت $(-1)^n$ معیاری
از زوج و فرد بودن ویژه حالت‌های انرژی را بدست می‌دهد به گونه‌ای
که اگر این عبارت زوج باشد (n زوج) ψ_n تابع زوجی از x
و اگر n فرد باشد ψ_n تابع فردی از x است.

$H=\frac{P^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2$ ، $H\psi_n=E_n\psi_n$ $(-1)^n$

نکته ۲ : در اتم هیدروژن با هامیلتونی $H = \frac{P^2}{2m} - \frac{e^2}{r}$

و $H\psi_{nlm} = E_n \psi_{nlm}$ عبارت $(-1)^l$ معیاری از زوج و فرد بودن تابع موج سیستم است که نشان می‌دهد اگر l زوج باشد ویژه حالت تابع زوجی از مکان و اگر l فرد باشد تابع فردی از مکان است.

نکته ۳ : اتم هیدروژن $n=2 \to l = \begin{cases} 1 & |p\rangle \\ 0 & |s\rangle \end{cases}$

فرد $l=1$ $\quad H|p\rangle = E_2|p\rangle$

زوج $l=0$ $\quad H|s\rangle = E_2|s\rangle$

نه زوج است نه فرد $\quad |\alpha\rangle = \alpha_p|p\rangle + \alpha_0|s\rangle$

$H|\alpha\rangle = E_2|\alpha\rangle$

در این حالت بهتر است کار را خراب کرد.

تحول سیستم	مولد فیزیکی	رابطه عملگر با مولد
مکانی - خطی $\tau(a)$	P	$\tau(a) = e^{-ipa/\hbar}$
مکانی - زاویه‌ای $R(\theta)$	L	$R(\theta) = e^{-iL\theta/\hbar}$
زمانی $U(t)$	H	$U(t) = e^{-iHt/\hbar}$

این سه عملگر، عملگرهای ریاضی‌اند.

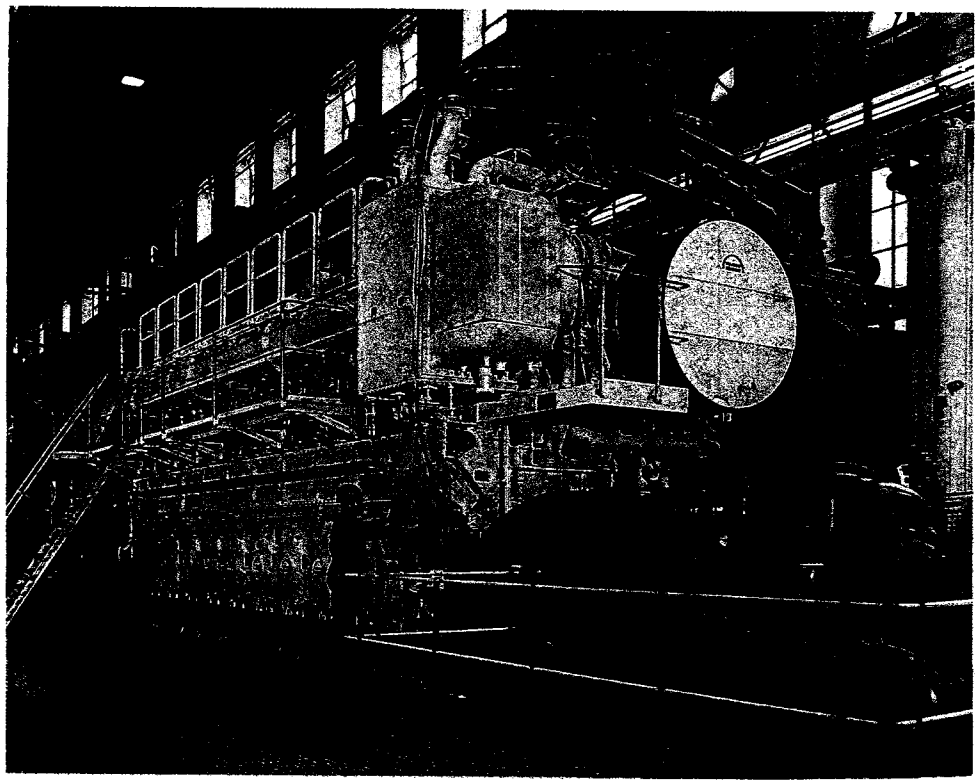
برای بررسی تحولات زمانی و مکانی در سیستم‌های کوانتومی از عملگرهای ریاضی استفاده می‌کنیم که مولد هر یک از آنها عملگرهای فیزیکی هستند.

هر یک از این عملگرها (مولد فیزیکی) عملگرهای هرمیتی‌اند و بدین ترتیب هر یک از این عملگرهای ریاضی تعریف شده عملگرهای یونیتاری می‌باشند.

تذکر: اگر یک سیستم فیزیکی تحت هر یک از این عملگرهای ریاضی ناوردا باشد باید مولد فیزیکی آن ثابت حرکت سیستم است.

بدین ترتیب به عنوان مثال اگر سیستم تحت عملگر $R(\theta)$

9L 58/64 ON THE TESTBED OF MAN - B&W GERMANY

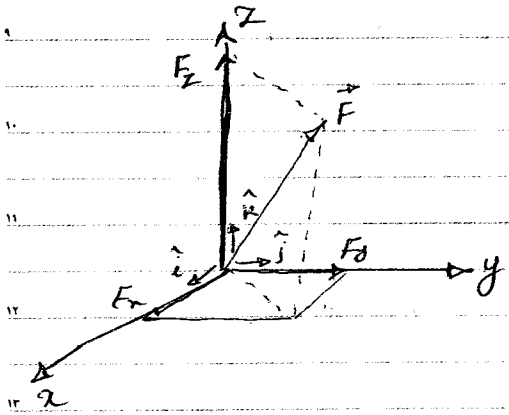


MAN GHH IRAN

ام.آ.ان.گ‌هاها.ایران

ناوردا باقی بماند عملگر اندازه حرکت زاویه‌ای L ثابت حرکت خواهد بود.

فضای برداری



$$\vec{F} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k}$$

شرط بهنجاری $\begin{cases} \hat{i}\cdot\hat{i} = \hat{j}\cdot\hat{j} = \hat{k}\cdot\hat{k} = 1 \\ \hat{i}\cdot\hat{j} = \hat{j}\cdot\hat{k} = \hat{k}\cdot\hat{i} = 0 \end{cases}$ شرط تعامد

شرط ارتونرمالیتی

فضای ماتریسی

$$\vec{F} = \vec{F}_x\hat{i} + \vec{F}_y\hat{j} + \vec{F}_z\hat{k}$$

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = F_x\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{a_1} + F_y\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{a_2} + F_z\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{a_3}$$

نرمالیزاسیون $(1\,0\,0)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (0\,1\,0)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (0\,0\,1)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$

تعامد $(1\,0\,0)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (0\,0\,1)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \dots = 0$

فضای دیراک

عملگر هرمیتی A $\quad A|a_1\rangle = a_1|a_1\rangle$

مجموعه بردار حالت : $|a_1\rangle, |a_2\rangle, \dots, |a_n\rangle \equiv \{|a\rangle\}$

مقادیر " " : $a_1, a_2, \dots, a_n \equiv \{a\}$

$$|\alpha\rangle = \alpha_1|a_1\rangle + \alpha_2|a_2\rangle + \dots + \alpha_n|a_n\rangle$$

$$\begin{cases} \langle\alpha_1|\alpha_1\rangle = \langle\alpha_2|\alpha_2\rangle = \dots = \langle\alpha_n|\alpha_n\rangle = 1 \\ \langle\alpha_1|\alpha_2\rangle = \langle\alpha_3|\alpha_5\rangle = \dots = \langle\alpha_i|\alpha_j\rangle_{i\neq j} = \dots \end{cases}$$

$a \to$ در فضای حقیقی ، $a^* \to$ در فضای موهومی

$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x^* b_x + a_y^* b_y + a_z^* b_z$ در فضای مختلط (مثل عدد)

$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \to$ فضای حقیقی ، $(a_x^* \; a_y^* \; a_z^*) \to$ فضای موهومی (مختلط)

$|a_1\rangle \to$ فضای حقیقی

$\langle a_1| \to$ فضای موهومی (مختلط)

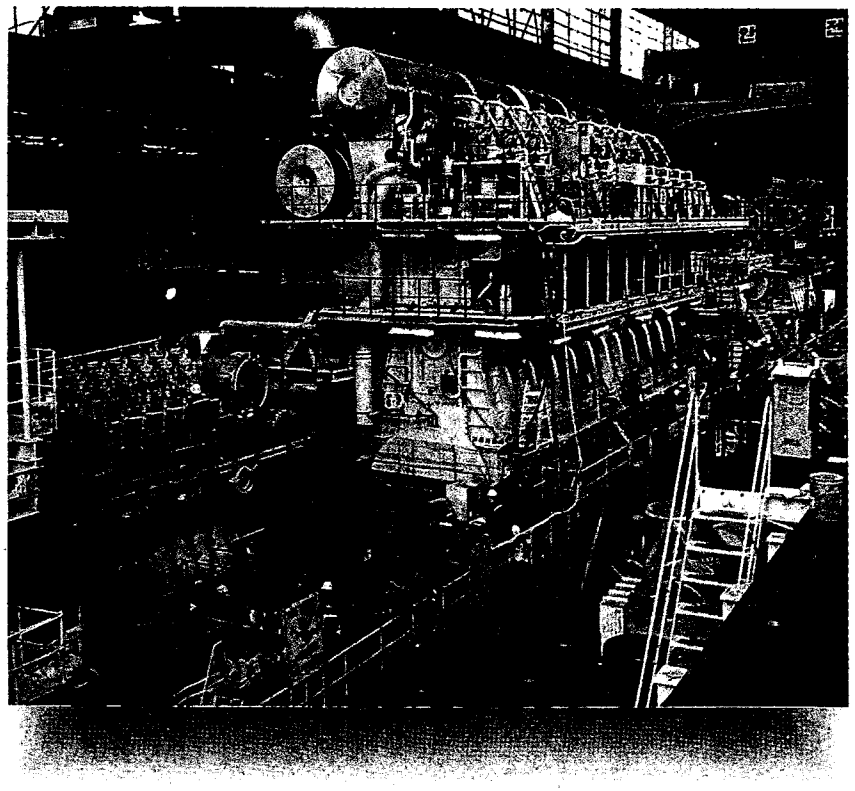
یک عدد $= \langle a|b\rangle$ ضرب داخلی

ولادت حضرت امام حسن عسکری علیه السلام (۲۳۲ ه.ق)

Two-stroke Diesel Engines

MAN B&W

Marine Engines
6S35MC and 10K98MC-C on Testbed



$$\vec{F} = \underbrace{(\vec{F}\cdot\hat{i})}_{F_x}\hat{i} + \underbrace{(\vec{F}\cdot\hat{j})}_{F_y}\hat{j} + \underbrace{(\vec{F}\cdot\hat{k})}_{F_z}\hat{k}$$

پس ضرب داخلی را با مؤلفه می‌دهد

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\left[(a_1\ a_2\ a_3)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]}_{\text{مؤلفه ۷ ضرب داخلی}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \dots$$

$$|a\rangle = \alpha_1|a_1\rangle + \alpha_2|a_2\rangle + \dots + \alpha_n|a_n\rangle$$

$$\langle a_1|a\rangle = \alpha_1\langle a_1|a_1\rangle + \dots + \alpha_n\langle a_1|a_n\rangle = \alpha_1\langle a_1|a_1\rangle$$

$$|\alpha\rangle = \langle a_1|\alpha\rangle|a_1\rangle + \dots + \langle a_n|\alpha\rangle|a_n\rangle$$

تصویر آن چیزی است که توان دوش با احتمال را می‌دهد

ضرب برداری: $\vec{a}\times\vec{b} \longrightarrow$ (به تعبیر دیگر عملگر دارد) یک بردار

$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}(b_1\ b_2\ b_3) \longrightarrow$ (عملگر) (عدد نمی‌دهد) یک ماتریس

$|a\rangle\langle b| \longrightarrow$ عملگر

ضرب خارجی

$$|\alpha\rangle = \overbrace{\langle a_1|\alpha\rangle}^{\text{عدد}}|a_1\rangle + \dots + \langle a_n|\alpha\rangle|a_n\rangle$$

$$= |a_1\rangle\langle a_1|\alpha\rangle + \dots + |a_n\rangle\langle a_n|\alpha\rangle$$

$$|\alpha\rangle = \left\{ |a_1\rangle\langle a_1| + \dots + |a_n\rangle\langle a_n| \right\}|\alpha\rangle$$

$$|\alpha\rangle = \sum |a_i\rangle\langle a_i|\ |\alpha\rangle$$

$$1 = \sum |a_i\rangle\langle a_i| \qquad \text{Closure}$$

$\Lambda_{a_i} = |a_i\rangle\langle a_i|$ Λ_{a_i} بردار است و جهت دارد

پس اگر روی هر مؤلفه‌ای اثر کند جهت آن جهت می‌دهد

$$\Lambda_{a_i}|\alpha\rangle = |a_i\rangle\underbrace{\langle a_i|\alpha\rangle}_{\text{عدد}} = \langle a_i|\alpha\rangle\ |a_i\rangle$$

Λ = Measurement Operator

نکته: عملگر دیاد یک $P_i = |e_i\rangle\langle e_i|$ از روی هر بردار، مؤلفه‌ی آن بردار را

روی محور e_i می‌دهد که به این دلیل آن را عملگر تصویر گر می‌گویند

نکته: $|a\rangle = \sum_j a_j|e_j\rangle$

$$P_i|a\rangle = |e_i\rangle\langle e_i|a\rangle = \sum_j a_j|e_i\rangle\langle e_i|e_j\rangle = a_i|e_i\rangle$$

مثال: A عملگری است که تابعی از x و p است.

$[x,A] = x^2+2p$ ، $[p^2,A] = ?$

$[x,A(p,x)] = i\hbar \frac{\partial A}{\partial p}$

$x^2+2p = i\hbar \frac{\partial A}{\partial p} \rightarrow A = \frac{1}{i\hbar}(x^2p+p^2+c)$

$[p^2,A] = \frac{1}{i\hbar}[p^2, x^2p+p^2+c] = \frac{1}{i\hbar}[p^2, x^2p]$.

معادله‌ی شرودینگر

معادله شرودینگر معادله‌ای است که حاکم بر رفتار موجی ذرات بوده و مشخصه‌ی توصیف کننده خاصیت موجی را بدست می‌دهد. این معادله از معادله‌ای است که می‌تواند رفتار موجی ذرات مادی را توصیف کند و معادلات موجی دیگری مانند معادله موج الکترومغناطیسی $(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\nabla^2)E(r,t)=0$ و یا معادله موج تار چه‌ی مرتعش برای توصیف خاصیت موجی اجسام مادی

کارآیی لازم را ندارد. چرا؟

معادله‌ی شرودینگر برای این چرا؟ را از طریق توجیه تجربی بدست آمده:

1/ با اصول دوبروی و انیشتین مطابقت کامل دارد $\lambda = \frac{h}{p}$ ، $\omega = \frac{E}{\hbar}$

2/ معادله انرژی $E = \frac{P^2}{2m}+V(x)$ را بخوبی نشان می‌دهد

نکته: در معادله موج الکترومغناطیسی مشتق زمانی و مکانی هم مرتبه‌اند زیرا از $E=pc$ و روابط عدم قطعیت $\Delta E\Delta t \geq \hbar$ و $\Delta x\Delta p \geq \hbar$ داریم که اگر E و P هم مرتبه باشند پس x و t نیز باید هم مرتبه باشند و در معادله شرودینگر $E = \frac{P^2}{2m}$ یعنی مشتق دوم مکانی دارد و مشتق اول زمانی (با توجه به رابطه عدم قطعیت) که عملاً در معادله شرودینگر دیده می‌شود.

$\Delta E\Delta t \geq \hbar \rightarrow \frac{\Delta p^2}{2m}\Delta t \geq \hbar$ (مرتبه دوم ، مرتبه اول)

3/ با توجه به تفاوت میان سیستم‌های فیزیکی برای این پتانسیل اعمال شده در آن معادله موج الکترومغناطیسی معادله‌ی مناسبی برای توصیف اجسام مادی (موجی) نمی‌باشد. از طرف دیگر انرژی پتانسیل

2 موجود در این معادله باید تابعی از مکان و زمان باشد.

(در تمامی مباحث بعدی تابعی را فقط تابعی از مکان در نظر می‌گیریم و این

به ما اجازه می‌دهد تا با استفاده از روش جداسازی متغیرها بتوانیم

مکان و زمانی تابع موج را کاملاً از هم تفکیک کنیم.)

4/ معادله باید نسبت به ψ خطی باشد تا اصل برهم‌نهی برای آن

برقرار باشد. (Superposition)

معادله شرودینگر وابسته به زمان و مستقل از زمان

ترمودینامیک (خطی) وابسته به زمان $H\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}$

مهم ** مستقل از زمان $H\psi = E\psi$

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_1 \left(H\psi_1 = i\hbar \frac{\partial \psi_1}{\partial t}\right) \\ &\alpha_2 \left(H\psi_2 = i\hbar \frac{\partial \psi_2}{\partial t}\right) \end{aligned}\right\} \rightarrow H(\alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}(\alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2)$$

$$\left.\begin{aligned} &H\psi_1 = E_1\psi_1 \\ &H\psi_2 = E_2\psi_2 \end{aligned}\right\} \rightarrow H(\alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2) = \alpha_1 E_1 \psi_1 + \alpha_2 E_2 \psi_2 = E_1\left(\alpha_1\psi_1 + \frac{E_2}{E_1}\alpha_2\psi_2\right)$$

3 مهم * یعنی برای معادله مستقل از زمان شرودینگر

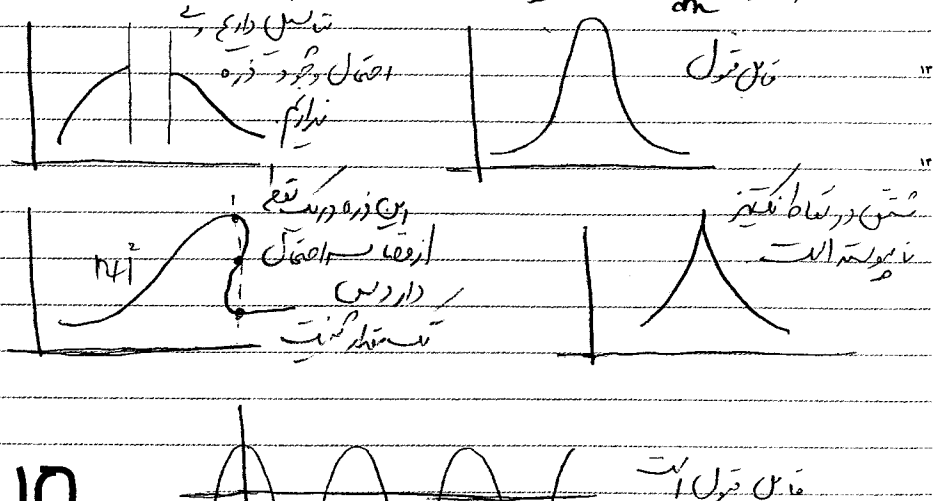
اصل برهم‌نهی را برای ویژه‌حالت‌های همگن داریم است.

تابع موج موجود در معادله شرودینگر باید دارای سه شرط اساسی باشد:

1/ ψ و $\frac{d\psi}{dx}$ باید دو تک مقدار باشند.

2/ ψ و $\frac{d\psi}{dx}$ باید دو متناهی باشند

3/ ψ و $\frac{d\psi}{dx}$ باید پیوسته باشند



تابع قبول است