جزوه دست نویس

نسبیت

دکتر علی شجاعی

استاد دانشگاه تهران

"نسبیت"

دکتر علی شجاعی

ترم بهار ۹۰-۱۳۸۹

مسائل مورد بحث :

- مکانیک نیوتنی
- نسبیت خاص
- الکترودینامیک
- میدان های کلاسیک نسبیتی
- نسبیت عام
- حل های گرانشی

References:

- Lauden : Special Relativity
- Resnik : Special Relativity
- Weinberg : Gravitation and Cosmology
- Rindler

16.11.89

نیوتن و گالیله رابطه بین همه دستگاه‌های مختصات را این گونه قبول داشتند:

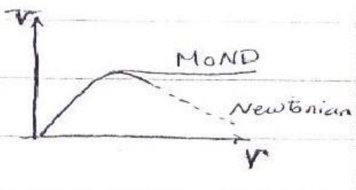
$$\left.\begin{aligned} \vec{x}' &= \overleftrightarrow{R}\cdot\vec{x} + \vec{u}t + \vec{x}_0 \\ t' &= t_0 + t \end{aligned}\right\} \rightarrow \text{تبدیلات گالیله}$$

(در تبدیل‌های لایب‌نیتس: $t' = f(t)$ به شرطی که f یک تابع monotonic از t باشد.)

* اگر $\vec{x}$ و t مؤلفه‌های مکانی و زمانی یک دستگاه اینرسی باشند، $\vec{x}'$ و t' هم متعلق به دستگاه اینرسی هستند.

* $m\dfrac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \vec{F}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|, |\vec{v}_i - \vec{v}_j|; t) \rightsquigarrow$ نیرو تابع اندازه $\Delta\vec{r}$ و $\Delta\vec{v}$ است، نه تابع $\vec{r}$ و $\vec{v}$ ی جسم

* MoND : Modified Newtonian Dynamics: $\vec{F} = \mu\,\vec{a}$ → تابع شتاب

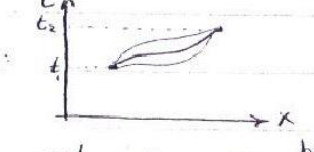


نمودار سرعت دورانی بر حسب فاصله از مرکز کهکشان. (یک راه حل این است که Dark Matter را وارد کنیم.)

* Principle of least action

مرور مکانیک کلاسیک با رهیافت هامیلتونی و لاگرانژی

Configuration space:



$$\mathcal{A} = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t)\,dt \qquad \delta\mathcal{A} = 0$$

$$\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta\dot{q}_i\right)dt \overset{\text{by Part}}{=} \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\Big|_{t_1}^{t_2}}_{0} + \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i\,dt = 0$$

$$\rightsquigarrow \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \qquad \text{معادله لاگرانژ}$$

شرایط مرزی کوشی: q_iها در مرزها داده شده‌اند.

" " نویمن: $\dot{q}_i$ " " " " "

" " مخلوط: در یک مرز q_i و در مرز دیگر $\dot{q}_i$ داده شده است.

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = F_i \longrightarrow \text{نیروی تعمیم یافته} \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = P_i \longrightarrow \text{تکانه تعمیم یافته}$$

Hamiltonian: $H(q_i, P_i; t) \equiv P_i \dot{q}_i - L \implies A = \int_{t_1}^{t_2} (P_i \dot{q}_i - H)\, dt$

$$\delta A = \int_{t_1}^{t_2} \Big(\dot{q}_i \delta P_i + \underbrace{P_i \delta \dot{q}_i}_{\text{by Part}} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{\partial H}{\partial P_i} \delta P_i \Big) dt = \cancel{P_i \delta q_i \Big|_{t_1}^{t_2}}^{\,0} + \int_{t_1}^{t_2} \Big(\dot{q}_i \delta P_i - \dot{P}_i \delta q_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{\partial H}{\partial P_i} \delta P_i \Big) dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \Big[\delta q_i \Big(-\dot{P}_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \Big) + \delta P_i \Big(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial P_i} \Big) \Big] dt = 0 \implies \begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{P}_i \\[2mm] \dfrac{\partial H}{\partial P_i} = \dot{q}_i \end{cases} \rightsquigarrow \text{معادلات همیلتون}$$

Poisson bracket: $\{A, B\} = \dfrac{\partial A}{\partial q_i} \dfrac{\partial B}{\partial P_i} - \dfrac{\partial A}{\partial P_i} \dfrac{\partial B}{\partial q_i}$

$* \ \{P_i, H\} = \cancel{\dfrac{\partial P_i}{\partial q_j}}^{\,0} \dfrac{\partial H}{\partial P_j} - \dfrac{\partial P_i}{\partial P_j} \dfrac{\partial H}{\partial q_j} = \dot{P}_i \qquad * \ \{q_i, H\} = \dot{q}_i \qquad * \ \{q_i, q_j\} = 0 \quad * \ \{P_i, P_j\} = 0$

$* \ \dfrac{dA}{dt} = \dfrac{\partial A}{\partial t} + \dfrac{\partial A}{\partial q_i} \dot{q}_i + \dfrac{\partial A}{\partial P_i} \dot{P}_i = \dfrac{\partial A}{\partial t} + \{A, H\} \qquad * \ \{q_i, P_j\} = \delta_{ij} \rightarrow$ fundamental P.B

$* \ \{\{A, B\}, C\} + \{\{B, C\}, A\} + \{\{C, A\}, B\} = 0$ اتحاد ژاکوبی

Equal Time P.B : * کمیاتی که برای آنها P.B را حساب می‌کنیم هم زمان فرض می‌شوند ← به اتحاد بالا

$* \ \{q_i, A(P_i)\} = \dfrac{\partial A}{\partial P_i} \qquad * \ \{P_i, B(q_i)\} = -\dfrac{\partial B}{\partial q_i}$

□ more study: Goldstein ⇝ chapter 8

18.11.89

Generators of the Galilei group

بسط تابع $B(\vec{x})$ را در نظر بگیرید:

$$B(\vec{x}+\xi) \overset{\text{تیلور}}{=} B(\vec{x}) + \frac{\partial B}{\partial x^i}\Big|_{\vec{\xi}=0} \xi^i + \cdots$$
$$= B(\vec{x}) + \xi^i \{B(\vec{x}), P_i\} + \frac{1}{2}\xi^i \xi^j \{\{B(\vec{x}), P_i\}, P_j\} + \cdots$$
$$\equiv \exp(\xi^i \{\ , P_i\})\, B(\vec{x})$$

ξ^i: پارامتر انتقال ، $\{\ , P_i\} = \hat{P}_i$ مولد انتقال مکانی

به همین ترتیب:

$$A(\vec{P}+\vec{\pi}) = \exp(\pi^i \{\ , \cancel{q_i}\ P_i\})\, A(\vec{P})$$

$\{\ , q_i\}$ منفی در بالا ضرب شده

explicite dependence

اگر تابعی وابستگی صریح زمانی نداشته باشد $\left(\frac{\partial A}{\partial t}=0\right)$:

$$A(t+\tau) = \exp(\tau \{\ , H\})\, A(t)$$

* مولد دوران: (به اندازه زاویه خیلی کوچک $\delta\theta$) در جهت $\hat{z}$:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\delta\theta & 0 \\ \delta\theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

عملگر دوران: $\exp\big(\theta\,\overbrace{(x\hat{P}_y - y\hat{P}_x)}^{\hat{L}_z}\big) = \exp(\theta, \{\ , xP_y - yP_x\}) = \exp(\theta\{\ , L_z\})$

در حالت کلی:

$$A(\vec{R}\cdot\vec{x}) = \exp(\vec{\theta}\cdot\hat{\vec{L}})\, A(\vec{x})$$

* مولد Boost:

$$A' = \exp(\vec{u}\cdot\underbrace{\{\ , \vec{B}\}}_{\hat{\vec{B}}})\, A$$

پیدا کردن فرم $\hat{\vec{B}}$:

مولد تبدیل کلی: $\exp(\tau\hat{H} + \vec{\xi}\cdot\hat{\vec{P}} + \vec{\theta}\cdot\hat{\vec{L}} + \vec{u}\cdot\hat{\vec{B}}) \longrightarrow \exp(\epsilon_a G^a) \quad a = 1, 2, \ldots, 10$

دو تبدیل متوالی:

$$\exp(\epsilon_a^{(2)} G^a)\, \exp(\epsilon_b^{(1)} G^b) = \exp(\epsilon_c^{(3)} G^c)$$

$S_2^{-1} S_1^{-1} S_2 S_1 = S' \;(e^{\epsilon_c^{(3)} G^c}) \rightarrow$ رابطه ✓

$$\cdots = 1 - \epsilon_a^{(1)} \epsilon_b^{(2)} [\hat{G}^a, \hat{G}^b] + \cdots = S' = 1 + \epsilon_c^{(3)} G^c + \cdots \rightarrow \begin{cases} [\hat{G}^a, \hat{G}^b] = f_{abc}\hat{G}^c \\ \epsilon_c^{(3)} = -f_{abc}\,\epsilon_a^{(1)}\epsilon_b^{(2)} \end{cases}$$

جبر Lie برای گروه گالیله ، ترکیب خطی از $\hat{G}^c$

که در فضای مینکوفسکی بالا یا پایین گذاشتن اندیس ها اهمیتی ندارد.

$S_1 S_2 = e^{+1} S_3$

در Scale مکان و زمان آزادیم:

$\to [\hat{G}_a , \hat{G}_b] = f_{abc}\, \hat{G}^c + \underbrace{C_{ab}\, \hat{\mathbb{1}}}_{\text{central charge}}$

* اگر G^a و G^b از یک جنس باشند (مثلاً هر دو $\hat{H}$ باشند)، C_{ab} مربوطه صفر است.

در حالت کلی C_{ab} ها به سه دسته تقسیم می‌شوند:

1/ دسته‌ای که اتوماتیک صفر می‌شوند، 2/ دسته‌ای که ~~...~~ قابل حذف هستند. (با بازتعریف ژنراتورها)

3/ دسته‌ای که غیرصفرند و معنای فیزیکی پیدا می‌کنند. در این مورد فقط یکی از این‌ها باقی می‌ماند که از آن تعبیر جرم را می‌کنیم.

- برای اینکه تبدیلات گالیله را بفهمیم باید جابه‌جایی همه مولدها را با هم بلد باشیم، یعنی ضرایب f و C را مشخص کنیم.

$[\hat{H}, \hat{H}] = 0$

از انتقال در زمان شروع می‌کنیم: (در واقع تبدیلات متوالی $S_2^{-1} S_1^{-1} S_2 S_1$ را در نظر می‌گیریم.)

$t_0 \to t_0 + \tau_a \to t_0 + \tau_a + \tau_b \to t_0 + \tau_a + \tau_b - \tau_a \to t_0 + \tau_a + \tau_b - \tau_a - \tau_b = t_0$

← بالاترین تبدیل نهایی باید صفر باشد: $\epsilon_c^{(3)} = 0 \to f_{abc} = 0 \to C_{ab} = 0$

$* [L_i , L_j] = -\epsilon_{ijk} L_k$

توضیح وجود علامت منفی:

$\hat{A} = \{ \, , A \}$

$\to [\hat{A}, \hat{B}] = \{ \, , A\}\{ \, , B\} - \{ \, , B\}\{ \, , A\} = \{\{ \, , B\}, A\} + \{\{ \, , A\}, B\} \overset{\text{Jacobi}}{=} -\{\{B, A\}, \, \}$

$= -\{ \, , \{A, B\}\}$

$\begin{cases} \text{if } \{A, B\} = C \\ \Rightarrow [\hat{A}, \hat{B}] = -\{ \, , C\} = -\hat{C} \end{cases}$

در مورد دوران:

$\{L_i , L_j\} = +\epsilon_{ijk} L_k \to [\hat{L}_i , \hat{L}_j] = -\epsilon_{ijk} \hat{L}_k$

این عملگرها روی فضای فاز عمل می‌کنند. در کوانتوم مکانیک: فضای فاز ← فضای هیلبرت. عملگرهای کلاسیک هم به این صورت تبدیل می‌یابند:

$$\hat{A}_c \longrightarrow \frac{i}{\hbar}\hat{A}_Q \Rightarrow [\hat{A}_Q, \hat{B}_Q] = i\hbar C_Q$$

به یک زبان دیگر:

$$\underset{\text{classic}}{\{\ ,\ \}} \longrightarrow \frac{i}{\hbar}\underset{\text{Quantum}}{[\ ,\ ]}$$

[*] Reference: Q.M. : Ballentine → chapter 3.

$$S = \prod_{a=1}^{10} e^{\epsilon_a G^a} \xrightarrow[\text{become infinitesimally small}]{\text{if all the Parameters } \epsilon_a} S = \mathbb{1} + \sum_{a=1}^{10} \epsilon_a G^a$$

$$S_2^{-1}S_1^{-1}S_2S_1 = \mathbb{1} - \epsilon_a^{(1)}\epsilon_b^{(2)}[G^a, G^b] + O(\epsilon^3) \Rightarrow$$

از طرفی حاصل این عبارت باید با یک تبدیل مشابه برابر باشد، اما در یک فاکتور فاز آزادی عمل داریم: $e^{\omega}S$ ← در واقع این یک مجموعه ۱۱ پارامتری است $\{\epsilon_a, \omega\}$ که همه آنها باید کوچک باشند.

$$\mathbb{1} - \epsilon_a^{(1)}\epsilon_b^{(2)}[G^a, G^b] = e^{\omega}S = e^{\omega}(\mathbb{1} + \epsilon_a^{(3)}G^a) = (\mathbb{1}+\omega)(\mathbb{1} + \epsilon_a^{(3)}G^a) = \mathbb{1} + \epsilon_a^{(3)}G^a + \omega\mathbb{1}$$

که تا مرتبه اول پارامترها تقریب می‌زنیم.

$$[G^a, G^b] = f_c^{ab}G^c + C^{ab}\mathbb{1} \quad (*)$$

$$\Rightarrow -\epsilon_a^{(1)}\epsilon_b^{(2)}f_c^{ab}G^c - \epsilon_a^{(1)}\epsilon_b^{(2)}C^{ab}\mathbb{1} = \epsilon_c^{(3)}G^c + \omega\mathbb{1} \Rightarrow \begin{cases} \epsilon_c^{(3)} = -\epsilon_a^{(1)}\epsilon_b^{(2)}f_c^{ab} \\ \omega = -\epsilon_a^{(1)}\epsilon_b^{(2)}C^{ab} \end{cases}$$

حال باید اپراتورهای مختلف گروه گالیله را در رابطه (*) بگذاریم و جابه‌جایی آنها را به دست آوریم. روش کار به این صورت است که دو اپراتور را انتخاب و آنها را در (اثر دادن) $e^{-\epsilon_b^{(2)}G^b}e^{-\epsilon_a^{(1)}G^a}e^{\epsilon_b^{(2)}G^b}e^{\epsilon_a^{(1)}G^a} = \mathbb{1} - \epsilon_a^{(1)}\epsilon_b^{(2)}[G^a, G^b]$ قرار می‌دهیم. در مرحله بعد مشخص می‌کنیم اگر این چهار اپراتور را اثر دهیم، نتیجه با چه اپراتوری برابر است.

جابه‌جایی دو اپراتور طبق (*) فقط با یک ضریب ثابت در اپراتور واحد $(C^{ab}\mathbb{1})$ با اپراتور حاصل (G^c) تفاوت دارد.

$$H \begin{smallmatrix} \nearrow P \\ \rightarrow L \\ \searrow B \end{smallmatrix} + P \begin{smallmatrix} \nearrow P \\ \rightarrow L \\ \searrow B \end{smallmatrix} + L \begin{smallmatrix} \nearrow L \\ \searrow B \end{smallmatrix} + B \rightarrow B = 10 \text{ Commutators.}$$

به دست آوردن جابه‌جایی اپراتورها:

1 Pure displacements in space and time:

$$\vec{X} \rightarrow \vec{X} + \vec{X}_0^{(1)} \rightarrow \vec{X} + \vec{X}_0^{(1)} + \vec{X}_0^{(2)} \rightarrow \vec{X} + \vec{X}_0^{(2)} \rightarrow \vec{X} \leadsto \epsilon_c^{0} = 0 \leadsto f_c^{ab} = 0 \leadsto [\vec{P}_a, P_b] = 0 + (?)\mathbb{1}$$

(2,3) از طرف دیگر می‌دانیم $[P_a, P_b] = 0$ ← C^{ab} مربوطه صفر است. با همین استدلال، C^{ab} مربوط به جز اپراتورهای تک‌جنسی، صفر است؛ غیر از مولدهای دوران.

4 $[P_a, H] = 0 + (?)\mathbb{1}$ (obviously)

5 Space displacements and velocity transformations:

$$\vec{X}, t \rightarrow \vec{X} + \vec{X}_0, t \rightarrow \vec{X} + \vec{X}_0 + \vec{V}t, t \rightarrow \vec{X} + \vec{V}t, t \rightarrow \vec{X}, t \leadsto \boxed{[P_a, B_b] = 0 + (?)\mathbb{1}}$$

6 Rotation and displacement:

$$x, y, z \rightarrow (\cos\theta\, x + \sin\theta\, y), (-\sin\theta\, x + \cos\theta\, y), z \rightarrow (\cos\theta\, x + \sin\theta\, y + x_0), (-\sin\theta\, x + \cos\theta\, y + y_0), z + z_0$$

$$\rightarrow (\cos^2\theta\, x + \cos\theta \sin\theta\, y + x_0\cos\theta + x\sin^2\theta - \sin\theta\cos\theta\, y - y_0 \sin\theta)$$

$$, (\sin\theta\cos\theta\, x + \sin^2\theta\, y + \sin\theta\, x_0 - \sin\theta\cos\theta\, x + \cos^2\theta\, y + y_0\cos\theta), z + z_0$$

$$\rightarrow (x + x_0\cos\theta - y_0\sin\theta - x_0), (y + x_0\sin\theta + y_0\cos\theta - y_0), z$$

$$x, y, z \rightarrow x, y, z$$

$$\leadsto [L_a, P_a] = 0 + (?)\mathbb{1}$$

اگر فرض کنیم زاویهٔ دوران خیلی کوچک باشد: $\cos\theta \simeq 1$ و $\sin\theta \simeq 0$ ←

اما در حالت کلی برقرار نیست. فقط وقتی که $P_b = P_z$ یعنی اندیس‌های L و P یکی باشند. ?

7 Rotation and velocity transformation:

$[L_a, B_a] = 0 + (?)\mathbb{1}$

مثل روش بالا:

8 $[L_a, H] = 0 + (?)\mathbb{1}$

Boost and time transformation:

$x, y, z, t \longrightarrow x + V_x t, y, z, t \longrightarrow x + V_x t, y, z, t + t_0 \longrightarrow x + V_x t - V_x(t+t_0), y, z, t + t_0$

$\longrightarrow x - V_x t_0, y, z, t$ $\rightsquigarrow$ this is just a space displacement by $-V_x t_0$ along the x axis.

$\rightsquigarrow S_2^{-1} S_1^{-1} S_2 S_1 = \exp(-V_x t_0 P_x)$ $\rightsquigarrow -V_x t_0 [B_x, H] = -V_x t_0 P_x + \cdots \Rightarrow [B_a, H] = P_a + (?)\mathbb{1}$

Rotation and Rotation: (Proof in text)

$[L_i, L_j] = \epsilon_{ijk} L_k + (?)\mathbb{1}$

* حالت کلی $[L_a, B_b]$:

فرض کنیم $a=1$, $b=2$:

$[L_1, B_2] = ?$

$x, y, z \longrightarrow x, (y\cos\theta + z\sin\theta), (-\sin\theta\, y + \cos\theta\, z) \longrightarrow x, (y\cos\theta + z\sin\theta + V_y t), (-y\sin\theta + z\cos\theta)$

$\longrightarrow x, y + V_y t\cos\theta, z + V_y t\sin\theta \longrightarrow x, y + V_y t\cos\theta - V_y t, z + V_y t\sin\theta$

$\theta \ll 1 \rightsquigarrow x, y, z \longrightarrow x, y, z + V_y\theta t$ $\rightsquigarrow$ Boost along the z axis. $\to [L_1, B_2] = B_3 + (?)\mathbb{1}$

$\Rightarrow [L_i, B_j] = \epsilon_{ijk} B_k + (?)I$

* حالت کلی $[L_i, P_j]$:

$i = 1, j = 2$

$x, y, z \longrightarrow x, (y\cos\theta + z\sin\theta), (-\sin\theta\, y + \cos\theta\, z) \longrightarrow x, (y\cos\theta + z\sin\theta + y_0), (-\sin\theta\, y + \cos\theta\, z)$

$\longrightarrow x, y + y_0\cos\theta, z + y_0\sin\theta \longrightarrow x, y + y_0\cos\theta - y_0, z + y_0\sin\theta$

$\theta \ll 1 \to x, y, z \to x, y, z + y_0\theta$ $\rightsquigarrow$ displacement by $y_0\theta$ along the z axis $\to [L_1, P_2] = P_3 + (?)\mathbb{1}$

$\Rightarrow [L_i, P_j] = \epsilon_{ijk} P_k + (?)\mathbb{1}$

* تعیین central charge برای اپراتورهای مختلف گروه گالیله:

1- اگر در $[G^a, G^b]$ ، $a=b$ ، $\mathcal{C}_{ab}$ مربوطه حتماً صفر است:

$$[H, H] = [P_i, P_i] = [L_i, L_i] = [B_i, B_i] = 0$$

2- با استفاده از اتحاد Jacobi برای اپراتورها می‌توان نشان داد:

$$[P_\alpha, H] = [P_\alpha, P_\beta] = [B_\alpha, B_\beta] = [L_\alpha, H] = 0$$

(البته شهوداً هم می‌توان به این نتیجه رسید!)

⇐ $\mathcal{C}_{ab}$ مربوط به این عملگرها (با توجه به نتایجی که قبلاً به دست آمده بود) حتماً صفر است $\longrightarrow$ first type of central charge

- نوع دوم این ضرایب، آنهایی هستند که مقدارشان الزاماً باقی می‌ماند، اما می‌توان با بازتعریف مولدهای مشخص، مقدارشان را به صفر انتقال داد؛ این نوع ضرایب مربوط به جابه‌جایی‌های این اپراتورها است: $[L_i, L_j]$ ، $[L_i, P_j]$ و $[L_i, B_j]$.

مثلاً برای $[L_i, L_j]$ ← چون جابه‌جایی نسبت به تعویض اندیس‌ها پادمتقارن است، $\mathcal{C}_{ab}$ مربوطه هم باید یک ثابت پادمتقارن باشد، به این شکل: $[L_i, L_j] = \epsilon_{ijk} L_k + \epsilon_{ijk} b^k$

b^k مقدار ثابت

redefinition $\rightarrow \quad L_i + b_i \rightsquigarrow L'_i \quad \Rightarrow \quad [L'_i, L'_j] = \epsilon_{ijk} L'_k \quad \rightarrow$ $\mathcal{C}_{ij}$ صفر شد.

به همین ترتیب می‌توان $\mathcal{C}_{ij}$ مربوطه در رابطهٔ جابه‌جایی دیگر را هم صفر کرد. (البته ابتدا باید ثابت کنیم این جابه‌جایی‌ها نسبت به تعویض اندیس پادمتقارن‌اند ← در متن کتاب)

با استفاده از نتایج بالا و اتحاد Jacobi می‌توان نشان داد $[B_\alpha, H]$ ← $\mathcal{C}_{ij}$ مربوطه صفر است.

- فقط در $[B_i, P_j]$ ضریب غیرصفر وجود دارد.

$$\boxed{[B_i, P_j] = \delta_{ij} M \mathbb{1}}$$

به این ترتیب:

$$\text{Jacobi:} \quad [[L_1, B_2], P_1] = [[P_1, B_2], L_1] + [[L_1, P_1], B_2]$$

$$\Rightarrow [B_3, P_1] = [(?)\mathbb{1}, L_1] + [0, B_2] = 0 \quad \Rightarrow \quad [B_i, P_j] = 0 \quad i \neq j$$

$$* \quad [[L_1, B_2], P_3] = [[P_3, B_2], L_1] + [[L_1, P_3], B_2]$$

$$\Rightarrow [B_3, P_3] = 0 + [-P_2, B_2] = [B_2, P_2] \quad \Rightarrow \quad [B_i, P_j] \propto \delta_{ij}$$

$$\left(* \quad \omega = -\epsilon^{(1)}_a \epsilon^{(2)}_b \mathcal{C}^{ab} = -u_a x_{0b} M \delta^{ab} = -M \vec{u} \cdot \vec{x}_0\right)$$

1.11.89

چون: $\{A, B\} = C \rightarrow [\hat A, \hat B] = -\hat C$ ،
به جای محاسبهٔ $[\hat A, \hat B]$ ، $\{\hat A, \hat B\}$ را حساب می‌کنیم.

* به دست آوردن فرم $\hat H$ و $\hat B$: $\{q_i, \hat H\} = \dot q_i = v_i$ $\qquad \{q_i, B_j\} = ?$

$e^{u_j\{\ , B_j\}}\, q_i = q_i + u_i t \xrightarrow{\text{خطی}} u_j\{q_i, B_j\} = u_i t \rightarrow \{q_i, B_j\} = t\,\delta_{ij}$

می‌دانیم: $\{B_i, P_j\} = m\delta_{ij}$. P.B. هر چیزی با P ، δ می‌شود ← q ← $\vec B = m\vec q + f(\vec P)$ که باید فرم f هم مشخص شود.

از طرفی: $\{q_i, B_j\} = t\delta_{ij}$ ، و می‌دانیم $\{q_i, P_j\} = \delta_{ij}$ پس: $\vec B = m\vec q + \underbrace{t\vec P}_{f(\vec P)}$ ← باید چیزی باشد که P.B. آن با P صفر شود.

می‌توان یک ثابت مستقل از $\vec P$ و $\vec q$ هم به $\vec B$ اضافه کرد که اهمیتی ندارد.

$$\rightarrow \boxed{\vec B = m\vec q + t\vec P}$$

***

$\{B_i, H\} = P_i \rightarrow \{m q_i + t P_i, H\} = P_i \rightarrow \frac{\partial H}{\partial P_i} = \frac{P_i}{m} \rightarrow H = \frac{P_i P_i}{2m} + H_0$

$\{q, A(p)\} = \frac{\partial A}{\partial p}$

- به دلیل اینکه فضا و زمان تقارن گالیله‌ای دارد، هامیلتونی به شکل $\frac{P^2}{2m}$ است.

H_0 نمی‌تواند مطلقاً به فضا بستگی داشته باشد، فقط می‌تواند تابع فاصله‌ی نسبی یا سرعت نسبی ذرات باشد

- اگر فضا و زمان تقارن گالیله‌ای نداشته باشد، فرم هامیلتونی به این شکل باقی نخواهد ماند ← اتفاقی که در نسبیت خاص می‌افتد.

- جملهٔ پتانسیل در هامیلتونی $V(\vec r)$ نیست. برهم‌کنش بین ذرات تابع فاصلهٔ نسبی آنهاست. $\vec V = V(|\vec r_1 - \vec r_2|, |\vec V_1 - \vec V_2|)$

اگر چنین مواردی را روی سیستمی با دو درجهٔ آزادی اثر دهیم، فرم تابعیت V به دست می‌آید.

مثلاً پتانسیل نیروهای مرکزی تابع فاصلهٔ دو ذره است، نیروی اصطکاک تابع سرعت نسبی دو ذره است که روی هم حرکت می‌کنند.

* تعبیر m ← در فضای مطلق به P و B : انرژی ، C_{ab} که از آنها پیدا شدند که $S_1 S_2$ را مشابه با S_3 قرار دادیم، به خودی خود یک ثابت وارد شد.

- اگر از $\vec x, t$ شروع کنیم و چهار تبدیل متوالی ذکر شده را روی آنها اعمال کنیم، به $\vec x, t$ برمی‌گردیم، اما این $\vec x, t$ با قبلی متفاوت است! وقتی ذره را جابجا کنیم در واقع آن را با فضای مطلق برهم‌کنش می‌دهیم. این برهم‌کنش آهنگ تغییرات فضا و زمان را به یک نسبت (m) کند می‌کند ← سرعت ذره عوض نمی‌شود اما شتاب آن $\frac{1}{m}$ می‌گردد. $\frac{d^2\vec x}{dt^2} = \frac{1}{m}\vec F$. در نسبیت خاص این جرم انرژی به شکل دیگری ظاهر می‌شود.

Gauge
(theory هم)

ورود به نسبیت خاص

اندازه‌گیری فضا - زمان $\vec{c} \equiv \vec{c}'$

سرعت استاندارد در هر فریمی سرعت رفت و برگشتش است؛ نه اینکه با اندازه‌گیری به دست بیاید که در هر فریمی $\vec{c}$ ثابت است.
فرض می‌کنیم!

- در مکانیک نیوتنی تعریف واحد زمان مبتنی بر حرکت یک سیستم است. امّا در تعریف حرکت هم از مفهوم زمان استفاده می‌شود.
پس باید یک حرکت استاندارد تعریف کنیم؛ یک استاندارد بنیادی.

- در مکانیک نیوتنی هم این فرض بود که سرعت رفت و برگشتش در همه دستگاه‌ها یکسان است، امّا با وجود تبدیلات گالیله، این سرعت ناوردا نمی‌شود.

حال هم فرض می‌کنیم اصولاً سرعت یک‌طرفش ناورداست، هم چنین یک مقدار محدود دارد. ناوردا بودن سرعت رفت و برگشتش را فرض می‌کنیم، نه اینکه جداگانه در سیستم‌های مختلف به دست آوریم و بعد ناوردا بودن آن را نتیجه بگیریم.
* $\vec{c}$ is equal to $\vec{c}'$ IDENTICALLY

- آزمایش مایکلسون مورلی صرفاً نشان می‌دهد تئوری اتر و مفاهیمش تئوری خوبی نیست!

- با این فرض‌ها تبدیلات گالیله ناسازگار است ← تبدیلات لورنتس و تبدیلات پوانکاره.

- اصول موضوعهٔ نسبیت خاص همان اصول موضوعهٔ مکانیک نیوتنی است: اصل نسبیت گالیله‌ای. فقط مشکل استاندارد زمان را حل می‌کند.

- کاری که با طبیعت می‌توانیم انجام دهیم فقط شمردن است!

- در یک نظریهٔ کامل همهٔ کمیت‌ها بی‌واحد هستند. (در QFT)

30.11.89

- در مکانیک نیوتنی بین scale های مختلف زمان و مکان تمایزی وجود ندارد، امّا باید طوری باشند که سرعت تغییر نکند.

- شتاب گرفتن از دید تقارن های گالیله‌ای برای فضا و زمان، یعنی تغییر scale طول و زمان.

- در نسبیت خاص فقط برای یکی از دو موجود مکان و زمان scale مشخص می‌شود، با استفاده از مکانیک کوانتومی و تئوری گرانش هر دو scale ها fix می‌شوند.

استاندارد طول را مشخص می‌کند: ⊢ 1m ⊣ . حال با داشتن استاندارد طول، ساعت استاندارد را این طور می‌سازیم که دو جسم را به فاصلهٔ واحد طول از یکدیگر در نظر می‌گیریم، و واحد زمان را به صورت رفت و برگشت یک سیگنال بین این دو تعریف می‌کنیم: . این سیگنال با اطلاعات می‌تواند از جنس برهم‌کنش های الکترومغناطیسی، گرانشی یا ضعیف و قوی هسته‌ای باشد که با سرعت استاندارد حرکت می‌کند: $c = 1$ (بدون واحد)

→ واحد زمان: $t = 1m$. نیازی به تعریف ثانیه نیست. (می‌توان واحد مکان و زمان را ثانیه هم در نظر گرفت، از تعریف زمان به مکان می‌رسیم.)

فضا و زمان محورهای مختلف یک موجودند: فضا-زمان مطلق، و چارچوب های اینرسی نسبت به این موجود با سرعت ثابت حرکت می‌کنند.

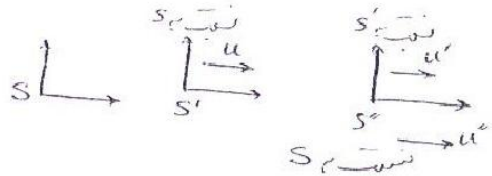
- پیدا کردن تبدیلاتی که این دستگاه های اینرسی را به هم مربوط می‌کند:

$$ds^2\big|_{signal} = dt^2 - |d\vec{x}|^2 = 0$$ → باید در همهٔ چارچوب های اینرسی برقرار باشد

در واقع شرط اینرسی بودن دستگاه این است که ds^2 برای signal صفر باشد.

- برای ذرات: ds'^2 تابعی از ds^2 است، اما تنها تابعیت ممکن به شکل $ds'^2 = A\, ds^2$ است، چون ds'^2 و ds^2 هر دو دیفرانسیل‌های مرتبه‌ی دوم هستند.

- A در حالت کلی تابعی از t ، x و $\vec{u}$ (سرعت نسبی دو دستگاه) می‌تواند باشد، اما به دلیل همگنی و همسانگردی فضا و همگنی زمان، تابع t و x و



اندازه‌ی $\vec{u}$ نیست: $A = A(u)$

$$ds'^2 = A(u)\, ds^2$$

$$ds''^2 = A(u')\, ds'^2 = A(u')\, A(u)\, ds^2$$

$$ds''^2 = A(u'')\, ds^2$$

پس $A(u')\, A(u) = A(u'')$. $\vec{u}''$: جمع برداری $\vec{u}$ و $\vec{u}'$ است. در این حالت u'' به نوعی تابع زاویه‌ی بین u و u' هم خواهد شد. اما همسانگردی فضا چنین اجازه‌ای را به A نمی‌دهد ← A تابع اندازه‌ی u هم نباید باشد ← $A = \text{Const.}$

$A^2 = A \rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ \text{or} \\ A = 1 \end{cases}$: قابل قبول نیست، چون ممکن است در یک چارچوب ds^2 صفر و در دیگری غیرصفر باشد (یعنی یک جسم در یک چارچوب سیگنال و در دیگری نه باشد!) $\Rightarrow A = 1 \rightarrow ds'^2 = ds^2$

* Reference : The classical theory of fields : Landau → chapter one.
(courses of theoretical physics : vol. 2)

- بدست آوردن تبدیلات پوانکاره:

$$X^{\mu} = (t, x, y, z)$$

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu}\, dx^{\mu} dx^{\nu} \qquad \eta_{\nu\mu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

از ناوردایی ds^2 رابطهٔ x'^{μ} و x^{μ} را بدست می‌آوریم:

$$\eta_{\mu\nu}\, dx^{\mu} dx^{\nu} = \eta_{\alpha\beta}\, dx'^{\alpha}\, dx'^{\beta} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} dx^{\mu} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\nu}} dx^{\nu}$$

$$\Rightarrow \eta_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\nu}}$$ ← معادلهٔ دیفرانسیل برای چهار مجهول

چون طرف چپ معادله ثابت است باید طرف راست هم باشد. تنها راه‌حل این است که:

$$\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} = const.$$

□ اثبات دقیق: از طرفین معادله نسبت به x^{γ} مشتق بگیرید: $\frac{\partial^2 x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\gamma}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial^2 x'^{\beta}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\gamma}} = 0$ ، همین عبارت برای جرضه‌های اندیس

$\nu\gamma\mu$ و $\gamma\mu\nu$ نیز بدین ترتیب باید $\frac{\partial^2 x'}{\partial x^2} = 0$ ← $\frac{\partial x'}{\partial x} = cte$: ضرب و تقسیم‌ها در کتاب Weinberg موجود است!

$$\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} = \Lambda^{\alpha}{}_{\beta} \Rightarrow x'^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}{}_{\beta}\, x^{\beta} + a^{\alpha}$$

a^{α} ها کاملاً دلخواه هستند؛

اما $\Lambda^{\alpha}{}_{\beta}$ ها دلخواه نیستند، در رابطهٔ $\eta_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \Lambda^{\alpha}{}_{\mu} \Lambda^{\beta}{}_{\nu}$ یا $\eta = \tilde{\Lambda} \eta \Lambda$ باید صدق کنند.

$\Lambda^{\alpha}{}_{\beta}$: 16 کمیت وجود دارد، اما به دلیل رابطهٔ بالا و با در نظر گرفتن متقارن بودن آن، 10 معادله برای این 16 کمیت صدق می‌کند ← 6 کمیت مستقل وجود دارد.

a^{α} ها هم 4 کمیت مستقل دارند ← 10 پارامتر در تبدیلات پوانکاره وجود دارد.

□ معنای فیزیکی a^α : a^0 ← انتقال زمانی ، a^i ← مؤلفه‌های انتقال مکانی .

– مثالی از ماتریس Λ : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & \left(R\right)_{3\times 3} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$. باید ببینیم در $\eta = \tilde{\Lambda}\eta\Lambda$ صدق می‌کند یا نه ؛ از قرار دادن در این معادله : $\tilde{R}R = \mathbb{1}$ می‌رسیم .

پس R ماتریس دوران دستگاه‌های مختصات است . (زمان را تغییر نمی‌دهد .) سه پارامتر (سه زاویه دوران) در R وجود دارد .

در نتیجه سه پارامتر دیگر مربوط به Boost است .

– یک مثال از Λ برای تبدیل Boost : $\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (← در راستای محور x ها) . شرط $\eta = \tilde{\Lambda}\eta\Lambda$ باید برقرار باشد :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 - c^2 & ab - cd \\ ab - cd & b^2 - d^2 \end{pmatrix}$$

$$d = a \equiv \cosh\xi$$
$$b = c \equiv \sinh\xi$$

← a ، b ، c و d را می‌توان برحسب یک کمیت دیگر نوشت .

حالا باید ξ را به دست آوریم :

مختصات مبدأ دستگاه دوم از دید ناظر اول . $x = ut \xleftarrow{x'=0}$

$$x' = cx + dt \Rightarrow 0 = cut + dt$$
$$\Rightarrow \tgh\xi = -u$$

$$\Rightarrow \Lambda^\alpha{}_\beta\Big|_{\text{Boost along the x axis}} = \begin{pmatrix} \gamma & -u\gamma & 0 & 0 \\ -u\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$$

– اگر $\gamma \to 1$ ، انتظار داریم به تبدیلات گالیله برسیم ، اما تبدیلات زمان این اتفاق را نشان نمی‌دهد .

$$t' = \gamma(t - ux) \xrightarrow{\gamma\to 1} t' = t - ux$$

if $c \neq 1 \Rightarrow t' = \gamma(t - \frac{u}{c^2}x) \rightarrow$ اگر تا order اول $\frac{u}{c}$ دقت کنیم باز هم $t' \neq t$

– در نسبیت خاص وقتی $\gamma \to 1$ ، مکانیک کلاسیک نیست ؛ هم چنین حد $\hbar \to 0$ ، مکانیک کوانتومی را به نیوتنی تبدیل نمی‌کند . (مثلاً در نوسانگر هماهنگ)

* * *

$$\eta = \tilde{\Lambda}\,\eta\,\Lambda \;\rightarrow\; \det\Lambda = \pm 1$$

$$\eta_{00} = 1 = \eta_{\alpha\beta}\,\Lambda^{\alpha}{}_{0}\,\Lambda^{\beta}{}_{0} = (\Lambda^{0}{}_{0})^2 - (\Lambda^{1}{}_{0})^2 - (\Lambda^{2}{}_{0})^2 - (\Lambda^{3}{}_{0})^2$$

$$\Rightarrow (\Lambda^{0}{}_{0})^2 \geq 1 \;\Rightarrow\; \begin{cases} \Lambda^{0}{}_{0} \geq 1 \\ \text{or} \\ \Lambda^{0}{}_{0} \leq -1 \end{cases}$$

□ اگر انتقال مکانی و زمانی را صفر در نظر بگیریم: تبدیلات پوانکاره ← تبدیلات لورنتس.

در حالت کلی چهار حالت وجود دارد.

	$\det\Lambda$	$\Lambda^{0}{}_{0}$		
Proper	$+1$	≥ 1	$L_{+}\uparrow$	تبدیلات خاص لورنتس
	$+1$	≤ -1	$L_{-}\uparrow$	$PT = \begin{pmatrix} -1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$
improper	-1	≥ 1	$L_{-}\uparrow$	$P = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$: Parity
	-1	≤ -1	$L_{-}\downarrow$	$T = \begin{pmatrix} -1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$: Time reversal

ساعتگرد — پادساعتگرد

□ اگر $\Lambda^{0}{}_{0} \geq 1$: تبدیل ساعتگرد (جهت زمان تغییر نمی‌کند.) اگر $\Lambda^{0}{}_{0} \leq -1$. پادساعتگرد.

7.12.89

— برای اندازه گیری فواصل مکانی و زمانی احتیاج به تعریف یک سرعت استاندارد داریم که این سرعت، سرعت انتشار اطلاعات یا برهم کنش بین ذرات می تواند باشد ؛ و بر این اساس تبدیلات بین دستگاه های اینرسی به دست می آید :

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\, x^{\nu} + a^{\mu} \qquad (\mu = 0,1,2,3)$$

در واقع چارچوب های اینرسی چارچوب هایی هستند که نسبت به فضا - زمان مطلق به این شکل تبدیل می یابند.

— در فضای سه بعدی، بردار را به صورت موجودی تعریف می کنیم که به شکل "جابه جایی" تبدیل می یابد. (← جابه جایی : تغییرات موقعیت، نه "موقعیت".)

$$dx'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\, dx^{\nu}$$

در فضای چهار بعدی فضا - زمان هم باید تبدیل dx^{μ} را بررسی کنیم :

$\Rightarrow$ 4-vector : $V'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} V^{\nu}$

$$T'^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha} \Lambda^{\nu}{}_{\beta}\, T^{\alpha\beta}$$

به همین ترتیب : چهار - اسکالر : $\varphi' = \varphi$ و چهار - تانسور مرتبه دو :

— در مورد متریک η : تبدیلات بین دستگاه های اینرسی را از شرط ناوردا بودن (اسکالر بودن) ds^2 به دست آوردیم که $ds^2 = \eta_{\mu\nu}\, dx^{\mu} dx^{\nu}$

dx^{ν} و dx^{μ} بردار (در واقع 4-بردار) و ds^2 اسکالر است ← طبق قضیه Quotient (قضیه خارج قسمت) $\eta_{\mu\nu}$ یک تانسور رتبه 2 است ؛ دیگر از لحاظ

پس باید طبق یک تانسور مرتبه 2 تبدیل پیدا کند : $\eta'_{\mu\nu} = \Lambda^{\alpha}{}_{\mu} \Lambda^{\beta}{}_{\nu}\, \eta_{\alpha\beta}$ ← که همان رابطه ای است که بین Λ ها برقرار است ؛

مقداری η' و η باهم برابرند ← η یک تانسور ثابت است.

η یک تانسور است، در نتیجه عبارت $\eta_{\mu\nu} V^{\nu}$ باید یک بردار باشد، که چون از V ساخته شده است، اصطلاحاً به آن V_{μ} می گوییم.

$$V'_{\mu} = \eta_{\mu\nu} V'^{\nu} = \eta_{\mu\nu} \Lambda^{\nu}{}_{\alpha} V^{\alpha}$$

نحوه تبدیل یافتن V_{μ} :

اما باید V^{α} را برحسب یک V_{β} بنویسیم. از رابطه $V_{\mu} = \eta_{\mu\nu} V^{\nu}$ باید استفاده کنیم و V^{ν} را برحسب V_{μ} بنویسیم : $V^{\nu} = (\eta_{\mu\nu})^{-1} V_{\mu}$

می دانیم : $\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$ ← معکوس ماتریس η خودش خواهد شد. وارون $\eta_{\mu\nu}$ را با $\eta^{\mu\nu}$ نشان می دهیم (اندیس ها را بالا می گذاریم).

در نتیجه داریم: $V^\nu = \eta^{\nu\mu} V_\mu$. (در واقع با ماتریس متریک می‌توانیم اندیس‌ها را بالا و پایین ببریم.)

$$\rightsquigarrow V'_\mu = \underbrace{\eta_{\mu\nu}\, \Lambda^\nu{}_\alpha\, \eta^{\alpha\beta}}_{\text{شکل ماتریسی: } \eta\Lambda\eta} V_\beta$$

برای اینکه عبارت $\eta_{\mu\nu}\, \Lambda^\nu{}_\alpha\, \eta^{\alpha\beta}$ را برحسب ماتریس Λ بنویسیم، به رابطه‌ای که بین Λها برقرار بود
یعنی $\Lambda^\mu{}_\nu\, \eta_{\mu\gamma}\, \Lambda^\gamma{}_\alpha = \eta_{\nu\alpha}$ توجه می‌کنیم. طبق این رابطه داریم: $\tilde{\Lambda}\eta\Lambda = \eta \Rightarrow \eta\Lambda = (\tilde{\Lambda})^{-1}\eta \Rightarrow \eta\Lambda\eta = (\tilde{\Lambda})^{-1}\eta\eta = (\tilde{\Lambda})^{-1}$

بنابراین یک چاربردار با اندیس پایین با $(\tilde{\Lambda})^{-1}$ تبدیل پیدا می‌کند، در حالی که چاربردار با اندیس بالا با Λ تبدیل پیدا می‌کرد.

$V^\mu \rightarrow$ contra variant 4-vector
$V_\mu \rightarrow$ covariant 4-vector

$\Big\} \rightarrow$ این دو موجود دو نمایش مختلف از یک چاربردار هستند. (در واقع dual هم هستند.)

به همین ترتیب می‌توان چهار-تانسورهای مرتبه‌ی بالاتر covariant و contra variant تعریف کرد.

- تقارنی که به فضا و زمان اعمال شده مبنی بر اینکه دستگاه‌های اینرسی معادلند، باعث شده است که متریک یک تانسور ثابت باشد.
در نسبیت عام که این تقارن شکل کلی‌تری دارد، لزوماً مقدار مؤلفه‌های متریک در دستگاه‌های مختلف ثابت نیست.

* عملگر مشتق (گرادیان در فضا-زمان چهاربعدی):

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

$$\partial'_\mu = \frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\nu} = \left((\tilde{\Lambda})^{-1}\right)^\nu{}_\mu\, \partial_\nu = \Lambda_\mu{}^\nu\, \partial_\nu \rightsquigarrow$$ عملگر گرادیان covariant است.

[می‌دانیم $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ ← $\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}$ ماتریس وارون Λ است]

قرارداد می‌کنیم که: اندیس بالا در مخرج ⇐ معادل اندیس پایین در صورت، و اندیس پایین در مخرج ← معادل اندیس بالا در صورت است.

- حساب تانسوری: جمع و تفریق تانسورهای هم‌مرتبه، ضرب تانسورها، تقسیم تانسورها (که جواب یکتایی ندارد)
- آنالیز تانسوری: مشتق‌گیری از تانسورها + انتگرال‌گیری از تانسورها $\rightsquigarrow$ قضایای گاوس و استوکس در فضا-زمان چهاربعدی و ...

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu}\, dx^\nu\, dx^\mu = dx_\mu\, dx^\mu$$

* از نظر هندسی، معنای ds^2، طول بردار dx^μ است، چون:
البته معنای طول چهاربردار با طول بردار در فضای سه بعدی متفاوت است. (در فضای سه بعدی صفر بودن طول بردار لزوماً به معنای صفر بودن تمام مؤلفه‌های بردار است؛ چون طول بردار از مجموع چند عبارت مثبت (نامنفی) تشکیل شده است:

$$|\vec{V}| = 0 \Longleftrightarrow \vec{V} = 0$$

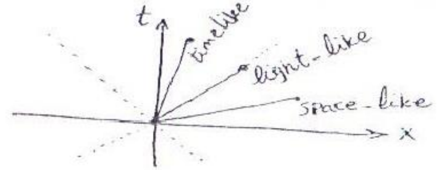
امّا: $ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$، یعنی امکان دارد dt و dx و dy و dz هیچ‌کدام صفر نباشند امّا طول چهاربردار صفر باشد، همان اتفاقی که برای سیگنال می‌افتد.

همچنین در این جا ds^2 می‌تواند هم مقادیر مثبت بگیرد و هم منفی.

$$\begin{cases} ds^2 > 0 \Rightarrow dt^2 > |d\vec{x}|^2 \rightarrow \text{Time like} \\ ds^2 < 0 \Rightarrow dt^2 < |d\vec{x}|^2 \rightarrow \text{Space like} \\ ds^2 = 0 \Rightarrow dt^2 = |d\vec{x}|^2 \rightarrow \text{light like} \end{cases}$$

(مؤلفه‌های زمانی از مؤلفه‌های فضایی بزرگتر است)

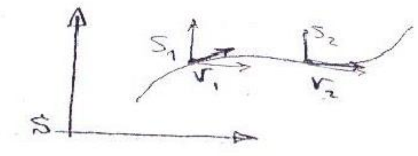
light like یا سیگنال گونه



با استفاده از نمودار فضا زمان هم می‌توان نشان داد:

- تعبیر فیزیکی ds^2: اوّلاً می‌دانیم ds^2 در همه دستگاه‌های لخت ناوردا است. و در ضمن می‌خواهیم حرکت ذرات را بررسی کنیم.

ذره‌ای را در نظر بگیرید که از دید چارچوب لخت S بررسی می‌شود. در این چارچوب ذره می‌تواند حرکت شتابدار داشته باشد. در لحظه، دستگاه مختصات S_i (مربوط به لحظه i ام) را طوری در نظر می‌گیریم که مبدأ آن در مکان ذره و سرعت آن نسبت به S، سرعت ذره در آن لحظه باشد.



دستگاه‌های S_i همواره نسبت به S با سرعت‌های ثابت V_i حرکت می‌کنند ← لخت هستند.

پس ds^2 در همه این مجموعه دستگاه‌ها و دستگاه S ناوردا است.

در همه این دستگاه‌ها، چارچوب‌های لحظه‌ای سکون ذره هستند ←

$$ds_i^2 = dt_i^2 - 0 = d\tau_i^2$$